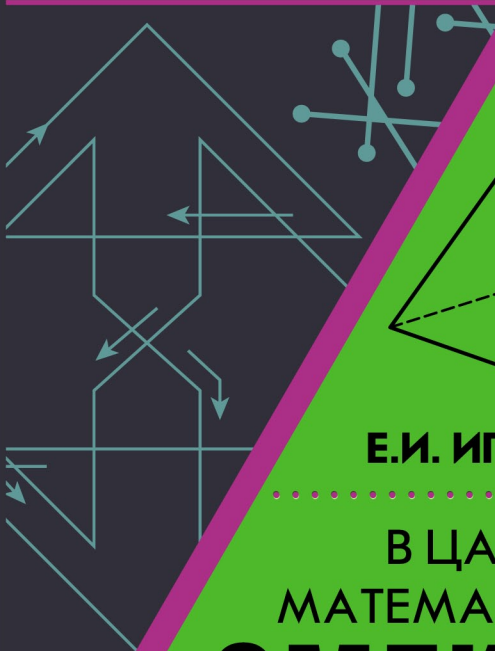
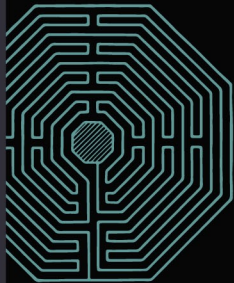
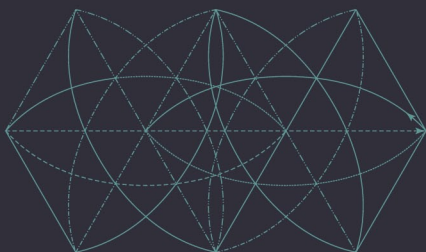
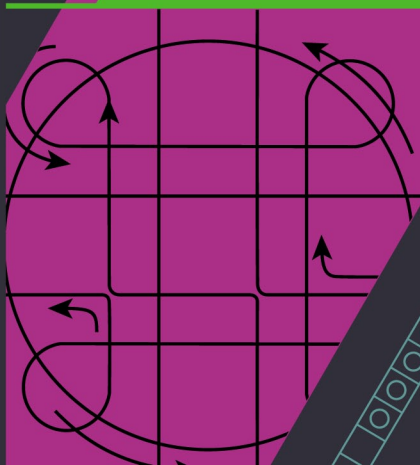


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СМЕКАЛКА

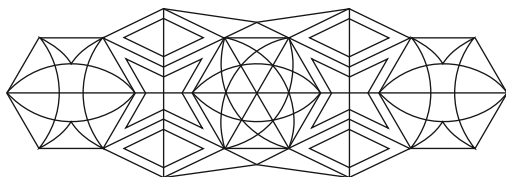


Е.И. ИГНАТЬЕВ

В ЦАРСТВЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СМЕКАЛКИ



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА



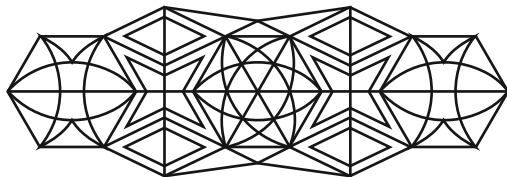
Е.И. Игнатъев
В ЦАРСТВЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СМЕКАЛКИ

Е.И. ИГНАТЬЕВ

.....

**В ЦАРСТВЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СМЕКАЛКИ**

.....



Москва
Издательство АСТ

УДК 51
ББК 22.1я9
И26

Текст печатается по изданию:

Игнатъев Е. И. В царстве смекалки / Под редакцией М. К. Потапова, текстол. обработка. Ю. В. Нестеренко. — 2-е изд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 208 с.

Игнатъев, Емельян Игнатъевич.

И26 В царстве математической смекалки / Е. И. Игнатъев; Под редакцией М. К. Потапова с текстологической обработкой Ю. В. Нестеренко. — Москва : Издательство АСТ, 2018. — 240 с. : ил. — (Математическая смекалка).
ISBN 978-5-17-982710-8

Перед вами широко известная книга Емельяна Игнатъевича Игнатъева (1869–1923), педагога и общепризнанного классика популярной математической литературы. «В царстве смекалки» переиздавалась множество раз и неизменно пользовалась успехом: задачи, головоломки и загадки из этой книги в течение более ста лет хорошо знакомы всем любителям интеллектуальной разминки.

Представленные в книге занимательные задачи имеют разную степень трудности. Для их решения не требуется продвинутого знания математики, достаточно базового уровня знаний арифметики и геометрии и сообразительности. Понятно изложенные решения и ответы расположены в конце книги.

УДК 51
ББК 22.1я9

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Книга Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки», написанная в начале нашего века, является одной из первых популярных книг по математике, изданных на русском языке. В ней содержится большое количество задач занимательного характера, имеющих различную степень трудности. Как правило, задачи решаются с привлечением минимальных сведений из арифметики и геометрии, но требуют сообразительности и умения логически мыслить.

Книга рассчитана на очень широкую читательскую аудиторию. С удовольствием и пользой для себя прочтут ее школьники, как младших классов, так и старшекласники. Родители найдут в ней интересные упражнения для развития смекалки у детей дошкольного возраста. Часть задач представляет интерес и для взрослых читателей. Внутри каждого раздела задачи расположены в порядке возрастания трудности. Может быть, взрослым некоторые из них покажутся знакомыми. Причина в том, что многие задачи из книги Е. И. Игнатьева попали в более поздние популярные издания и стали широко известны.

За 70 лет, прошедших с момента выхода первого издания книги, совершились огромные изменения в общественном и социальном устройстве нашей страны. Условия многих задач, отражавшие реальные отношения прошлого века, сегодняшнему читателю показались бы непривычными. Мы переработали часть задач, стараясь придать им более современный вид или стилизуя под старинные истории и сказки. При этом всюду, где только было возможно, сохранялся образный язык автора. Опущены некоторые главы книги, на наш взгляд, не очень интересные современному читателю. Вместе с тем добавлено небольшое количество близких по тематике задач.

По своей структуре настоящее издание существенно отличается от предыдущего (М., «Наука», 1978 г.), Учитывая просьбы читателей, мы выделили решения задач, советы и некоторые комментарии в самостоятельный раздел. Стремясь к тому, чтобы книга была понятна всем категориям читателей, мы и в новом издании сохранили интуитивно ясный всем термин «равные фигуры». Тем более, что в книге речь идет не о формальных математических конструкциях, рассматриваемые треугольники и квадраты как правило являются кусками обычной бумаги.

1978

*М. К. Потанов,
Ю. В. Нестеренко*

Из предисловия автора к изданию 1908 г .

Станет ли кто в наше время отрицать настоятельную необходимость самого широкого распространения и популяризации математических знаний? Первоначальные математические познания должны входить с самых ранних лет в наше образование и воспитание. Само собой разумеется при этом, что умственную самостоятельность, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью. Пытаясь перенести читателя в «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаем себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полноте. Для этого понадобилась бы не одна такая книга: так велика и обширна область только тех отделов математики, которые можно подвести под общее заглавие «математических игр и развлечений».

Внимательный читатель заметит, что книга по возможности разбита на разделы, содержащие каждый однородные задачи в порядке возрастания их трудности. Нет, вообще говоря, никакой надобности читать и разбираться в такой книге подряд. Каждый может для начала взять тот раздел, который его наиболее заинтересует, и разобраться сначала в нем, затем перейти к любому другому и т. д. Нельзя, однако, поручиться, что принятая нами планировка материала удовлетворит всех. Слишком субъективное это дело: что одному дается трудно, то другому легко, и наоборот. Легко убедиться, что почти все предлагаемые в книге задачи можно видоизменять и де-

лать предметом беседы даже с маленькими детьми. С другой стороны, мы надеемся, что данная книга может послужить неплохим пособием для математического саморазвития не одного только учащегося юношества, а для всех вообще чувствующих склонность к работе ума.

Из ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА к ИЗДАНИЮ 1911 г. РОЛЬ ПАМЯТИ В МАТЕМАТИКЕ

Относительно математики в нашем обществе еще до сих пор существуют самые странные предрассудки. Одни говорят, что заниматься математикой могут только исключительные, одаренные совсем особыми способностями умы, другие утверждают, что для этого необходима особая, так сказать, «математическая память» для запоминания формул и т. д.

Нельзя, конечно, спорить против того, что существуют умы с резко выраженными склонностями к той или иной стороне умственной деятельности. Но точно так же никоим образом нельзя утверждать, что существуют хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсем неспособны к восприятию и полному усвоению необходимых математических знаний, хотя бы, скажем, в размерах курса средней школы.

Будем справедливы и признаем, наконец, что выражение «неспособен к математике» есть прежде всего горький продукт нашего неумения, а, пожалуй, иногда и легкомысленного нежелания поставить в семье и школе преподавание математики на должную высоту.

Еще менее можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминания (зазубривания?) каких-то формул или правил, науку сознательной и последовательной логической мысли обращать в какой-то механический, бессознательный процесс. А между тем, как далеко может заходить дело в этом отношении, свидетельствует известный русский математик В. П. Ермаков. Вот что, между прочим, сообщал он в одном из своих докладов Киевскому физико-математическому обществу.

«Когда мне пришлось студентам читать интегральное исчисление, то в первый же год произошел эпизод, который навсегда сохранится в моей памяти.

Прочитавши часть теории, я для пояснения даю задачи. Я прошу студентов решать задачи в тетрадях. По мере решения я пишу полученные результаты на доске. Однажды для пояснения способов понижения биномиальных интегралов я написал на доске подходящую задачу. И вот вижу, что некоторые студенты вынимают из карманов какие-то тетрадки и смотрят в них.

— Что это?

— Общие формулы.

— Зачем?

— Нам прежний профессор советовал иметь список общих формул и по нему решать частные примеры. Ведь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память все сорок общих формул.

— Заучивать в математике никаких формул не следует. Но я нахожу также неуместным пользование справочными пособиями и нахождение интегралов по общим формулам подстановкою в них данных значений показателей и коэффициентов. Ведь не с неба свалились к нам общие формулы; для вывода их вы употребили ряд рассуждений; применяйте те же рассуждения к частным примерам.

Таким образом оказалось возможным находить всякие интегралы и без общих формул. Пришлось, впрочем, некоторые выкладки видоизменить так, чтобы они непосредственно могли быть приложены к частным примерам.

Получилась еще и та выгода, что на каждом частном примере студенты повторяли все те же рассуждения, которые необходимы для вывода общей формулы. От частого повторения приобретался навык, и в результате — быстрота решения задач.

Рассказанный эпизод заставил меня глубже вникнуть в сущность математики.

В молодых годах и я обращал все внимание на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о том, чтобы убедиться в его строгости. Вот добрался до окончательного результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процесс доказательства быстро испарялся. Но потом забывались и формулы, а ча-

сто эти формулы оказывались необходимыми при дальнейших занятиях. Что же оставалось делать? Собрать библиотеку из справочных книг? Но на это не хватало средств, да и не было помещения для библиотеки. Поневоле приходилось припоминать самый процесс, при помощи которого выводилась та или иная формула. Таким образом, вместо формул мало-помалу я пришел к самим доказательствам. Оказалось, что легче припомнить процесс математического мышления, чем голые формулы. Да и нет надобности помнить целиком весь процесс мышления, достаточно наметить этапные пункты, по которым должна идти наша мысль. И вот уже несколько лет, как я своим слушателям твержу: в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления.

Прочитавши какой-нибудь отдел из аналитической геометрии, я излагаю студентам конспект, в котором без формул намечаю главные пункты мышления.

Если выражен процесс математического мышления, то получение самих формул является уже делом чисто механическим. В механизме же алгебраических действий ученики должны приобрести навыки еще в средней школе.

Я пришел к тому убеждению, что указанный мною принцип должен быть применен и в средней школе...»

Продолжим мысль В. П. Ермакова и скажем: указанный принцип должен в особенности лечь в основание начального — как семейного, так и школьного — образования в области математических знаний. Не натаскивайте ни ребят, ни юношей на различных «табличках» сложения, вычитания, умножения, на механическом запоминании разных «правил» и формул, а прежде всего приучайте охотно и сознательно мыслить. Остальное приложится. Не мучьте никого длиннейшими скучнейшими и механическими вычислениями и упражнениями.

Когда они понадобятся кому-либо в жизни, он их проделает сам, — да на это нынче есть всякие счетные машины, таблицы и иные приспособления.

**ЗАДАЧИ-ШУТКИ,
ЗАДАЧИ-ЗАГАДКИ
И ШУТОЧНЫЕ ИСТОРИИ**

1. Дележ

Разделить 5 яблок между пятью лицами так, чтобы каждый получил по яблоку и одно яблоко осталось в корзине.

2. Сколько кошек?

В комнате четыре угла. В каждом углу сидит кошка. Напротив каждой кошки по три кошки. На хвосте каждой кошки по одной кошке. Сколько же всего кошек в комнате?

3. Портной

Портной имеет кусок сукна в 16 метров, от которого он отрезает ежедневно по 2 метра. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

4. Число 666

Число 666 увеличить в полтора раза, не производя над ним никаких арифметических действий.

5. Дробь

Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя?

6. Разрубить подкову

Двумя ударами топора разрубить подкову на шесть частей, не перемещая частей после удара.

7. Что сказал старик?

Два молодых казака, оба лихие наездники, бились между собою об заклад, кто кого перегонит. Не раз то тот, то другой был победителем, наконец это им надоело.

— Вот что, — сказал Григорий, — давай спорить наоборот. Пусть заклад достанется тому, чей конь придет в назначенное место вторым, а не первым.

— Ладно! — ответил Михаил.

Казаки выехали на своих конях в степь. Зрителей собралось множество: всем хотелось посмотреть такую диковинку. Один старый казак начал считать, хлопая в ладоши:

— Раз!.. Два!.. Три!..

Спорщики; конечно, ни с места. Зрители стали смеяться, судить да рядить и порешили, что такой спор невозможен и что спорщики простоят на месте, как говорится, до скончания века. Тут к толпе подошел седой старик, выдавший на своем веку разные виды.

— В чем дело? — спрашивает он.

Ему сказали.

— Эге ж! — говорит старик, — вот я им сейчас шепну такое слово, что поскачут, как ошпаренные...

И действительно... подошел старик к казакам, сказал им что-то, и через полминуты казаки уже неслись по степи во всю прыть, стараясь непременно обогнать друг друга, но заклад все же выигрывал тот, чья лошадь приходила второй.

Что сказал старик?

УПРАЖНЕНИЯ СО СПИЧКАМИ

Запаситесь коробкой спичек. С их помощью вы всегда можете придумать ряд забавных и остроумных задач, развивающих сообразительность и смекалку. Вот для примера некоторые простейшие из них.

8. Сто

Приложить к четырем спичкам (рис. 1) пять спичек так, чтобы получилось сто.

Решение задачи показано на рис. 2. Попробуйте найти еще одно решение.



Рис. 1



Рис. 2

9. Три

Положено пять спичек (рис. 3). Прибавить к ним еще пять спичек так, чтобы получилось три.



Рис. 3

10. Дом

Из спичек построен дом (рис. 4). Переложить две спички так, чтобы дом повернулся другой стороной.

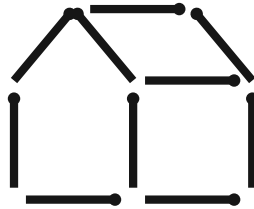


Рис. 4

11. Рак

Спичечный рак ползет вверх (рис. 5). Переложить три спички так, чтобы он пополз вниз.

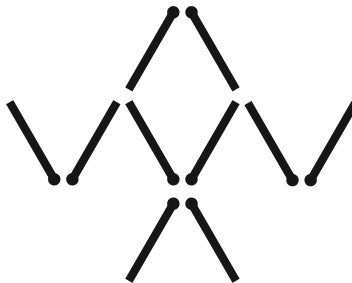


Рис. 5

12. Весы

Весы составлены из девяти спичек и не находятся в состоянии равновесия (рис. 6). Требуется переложить в них пять спичек так, чтобы весы были в равновесии.

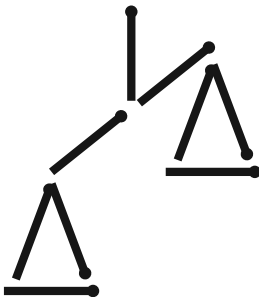


Рис. 6

13. Две рюмки

Две рюмки составлены из десяти спичек (рис. 7). Переложить шесть спичек так, чтобы получился дом.

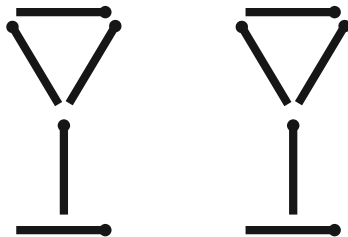


Рис. 7

14. Храм

Этот греческий храм (рис. 8) построен из одиннадцати спичек. Требуется переложить четыре спички так, чтобы получилось пятнадцать квадратов.

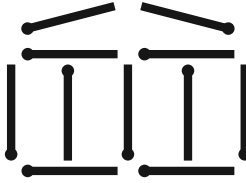


Рис. 8

15. Флюгер

Флюгер (рис. 9) составлен из десяти спичек. Переложить четыре спички так, чтобы получился дом.

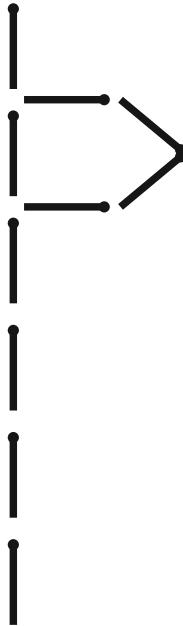


Рис. 9

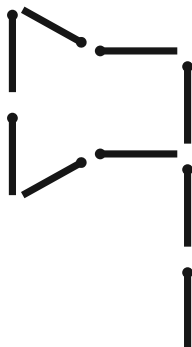
16. Фонарь

Переложив 6 спичек, требуется фонарь (рис. 10) превратить в четыре равных треугольника.

*Рис. 10*

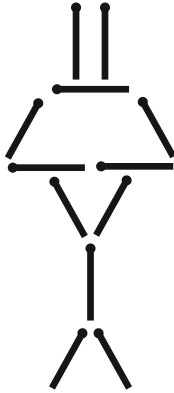
17. Топор

Переложив четыре спички, превратить топор (рис. 11) в три равных треугольника.

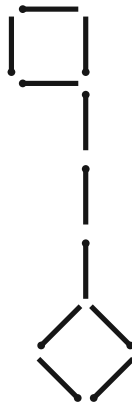
*Рис. 11*

18. Лампа

В лампе, составленной из двенадцати спичек (рис. 12), переложить три спички так, чтобы получилось пять равных треугольников.

*Рис. 12***19. Ключ**

Из десяти спичек сделан ключ (рис. 13). Переложить в нем четыре спички так, чтобы получилось три квадрата.

*Рис. 13*

20. Три квадрата

Построена фигура, показанная на рис. 14. Переложить в ней пять спичек так, чтобы получилось три квадрата.



Рис. 14

21. Пять квадратов

Спички расположены, как показано на рис. 15. Переложить две спички так, чтобы получилось пять равных квадратов.

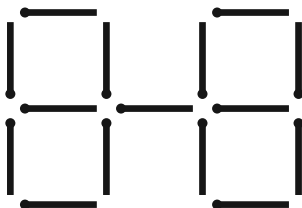


Рис. 15

22. Три квадрата

В фигуре, изображенной на рис. 16, снять три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.

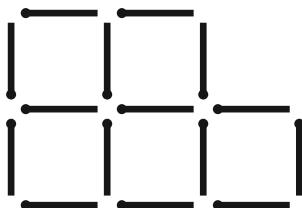


Рис. 16

23. Два квадрата

В фигуре, изображенной на рис. 17, переложить пять спичек так, чтобы получилось всего два квадрата.

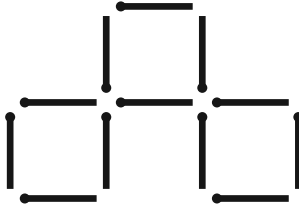


Рис. 17

24. Три квадрата

В спичечной фигуре на рис. 18 переложить три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.

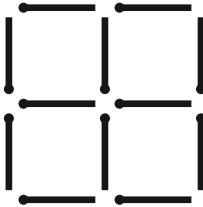


Рис. 18

25. Четыре квадрата

Из спичек сложена фигура, представленная на рис. 19. Переложить семь спичек так, чтобы получилось четыре квадрата.

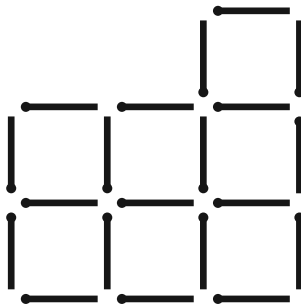


Рис. 19

26. Квадраты

В фигуре на рис. 20 снять восемь спичек так, чтобы: 1) осталось только 2 квадрата; 2) осталось 4 равных квадрата.

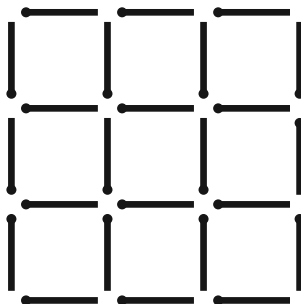


Рис. 20

27. Четыре треугольника

Из шести спичек составить четыре равных равносторонних треугольника.

28. Поднять одной спичкой 15 спичек

Возьмите 15 спичек и поднимите их с помощью одной спички.

КАК СОСЧИТАТЬ?

29. Движение пальца

Один малыш жаловался, что ему трудно запомнить таблицу умножения первых десяти чисел на 9. Отец его нашел очень легкий способ помочь памяти с помощью пальцев рук. Вот этот способ.

Положите обе руки рядом на стол и вытяните пальцы. Пусть каждый палец по порядку означает соответствующее число: первый слева 1, второй за ним 2, третий 3, четвертый 4 и т. д. до десятого, который означает 10. Требуется теперь умножить любое из первых десяти чисел на 9. Для этого вам стоит только, не сдвигая рук со стола, приподнять вверх тот палец, который обозначает множимое. Тогда остальные пальцы, лежащие налево от поднятого пальца, дадут в сумме число десятков, а пальцы направо — число единиц.

Пусть надо умножить 7 на 9. Кладете обе руки на стол и поднимаете седьмой палец, налево от поднятого пальца лежит 6 пальцев, а направо — 3. Значит, результат умножения 7 на 9 равен 63.

Это удивительное на первый взгляд механическое умножение тотчас же станет понятным, если рассмотреть таблицу умножения первых десяти последовательных чисел на 9:

$$1 \times 9 = 09 \qquad 6 \times 9 = 54$$

$$2 \times 9 = 18 \qquad 7 \times 9 = 63$$

$$3 \times 9 = 27 \qquad 8 \times 9 = 72$$

$$4 \times 9 = 36 \qquad 9 \times 9 = 81$$

$$5 \times 9 = 45 \qquad 10 \times 9 = 90$$

Здесь цифры десятков в произведениях идут, последовательно увеличиваясь на единицу: 0, 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, а цифры единиц

идут, наоборот, уменьшаясь на единицу: 9, 8, 7, ..., 1, 0. Сумма же цифр единиц и десятков всюду равна 9. Простым поднятием соответствующего пальца мы отмечаем это и... умножаем. Человеческая рука есть одна из первых счетных машин.

30. Рейс через океан

Каждый день в полдень отправляется пароход из Гавра через Атлантический океан в Нью-Йорк и в то же самое время пароход той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Переезд в том и другом направлении совершается ровно за 7 дней. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встречает пароход на пути из Гавра в Нью-Йорк?

31. Продажа яблок

Крестьянка принесла на рынок корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех своих яблок и еще пол-яблока, второму —половину остатка и еще пол-яблока, третьему —половину остатка да еще пол-яблока и т. д. Когда же пришел шестой покупатель и купил у нее половину оставшихся яблок и пол-яблока, то оказалось, что у него, как и у остальных покупателей, все яблоки целые и что крестьянка продала все свои яблоки. Сколько яблок она принесла на рынок?

32. Гусеница

В шесть часов утра в воскресенье гусеница начала вползать на дерево. В течение дня, т. е. до 18 часов, она вползала на высоту 5 м, а в течение ночи спускалась на 2 м. В какой день и час она вползет на высоту 9 м?

33. Велосипедисты и муха

Два города, А и В, находятся на расстоянии 300 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают друг другу навстречу два велосипедиста и мчатся, не останавливаясь, со скоростью 50 км/ч. Но вместе с первым велосипедистом из города А вылетает муха, пролетающая в час 100 км. Муха опережает первого велосипедиста, летит навстречу второму, выехавшему из В. Встретив его, она сразу поворачивает назад к велосипедисту А. Повстречав

его, опять летит обратно навстречу велосипедисту B , и так продолжала она свои полеты взад и вперед до тех пор, пока велосипедисты не съехались. Тогда она успокоилась и села одному из велосипедистов на шапку. Сколько километров пролетела муха?

34. Собака и два путешественника

Два путешественника идут по одной и той же дороге в одном и том же направлении. Первый находится на 8 км впереди другого и идет со скоростью 4 км/ч, второй делает по 6 км в час. У одного из путешественников есть собака, которая именно в тот момент, когда мы начали наблюдать за ними, побежала от своего хозяина к другому путешественнику (ее скорость 15 км/ч). Затем она вернулась к хозяину и опять побежала к другому путешественнику. Так она бегала от одного к другому до тех пор, пока путешественники не встретились. Нужно узнать, какой путь пробежала собака.

35. Быстрое возведение в квадрат

Существует очень простой прием для устного быстрого возведения в квадрат двухзначных чисел, оканчивающихся на 5.

Нужно цифру десятков умножить на ближайшее к этой цифре большее целое число и к произведению приписать 25.

Например, $35^2 = 1225$, $85^2 = 7225$.

Объясните, почему так получается.

36. Интересное число

Некоторое число оканчивается на 2. Если же эту его последнюю цифру переставить на первое место, то число удвоится. Найти это число.

37. Найти число

Найти число, которое, будучи разделено на 2, дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5, но на 7 это число делится надело.

38. Сумма последовательных чисел

Для предлагаемой задачи можно пользоваться картами, которые нетрудно нарезать из бумаги, и нарисовать на них карандашом или чернилами черные кружочки. На первой — один кружочек, на второй — 2 на третьей — 3 и т. д. до десяти. Каждую карту надо сделать в двух экземплярах. Теперь мы вполне подготовлены для практического решения задачи.

Взято десять сделанных нами карточек, от единицы до десятки. Вычислить, сколько всего очков будет в этих десяти картах, не прибавляя последовательно очков первой карты ко второй, результата этого сложения — к очкам третьей и т. д., т. е. не делая длинного ряда последовательных сложений.

Дело сводится к тому, чтобы быстро, без последовательного сложения узнать сумму первых десяти чисел (от 1 до 10). Берем десять карт от единицы до десятки и кладем их в ряд. Берем затем десять других карт и подкладываем их под первым рядом, но только в обратном порядке:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

У нас получается два ряда по десяти карт, или десять столбцов по две карты. Если сосчитать, сколько очков в каждом столбце, окажется, что в *каждом* столбце по *одинадцати* очков. А всего в десяти столбцах, или в двух рядах карт, — десять раз по одинадцати очков, или 110 очков. Но в обоих длинных рядах, очевидно, по одинаковому числу очков. Значит, сумма всех очков одного ряда равна половине 110, т. е. равна 55. Итак, в десяти картах — 55 очков.

Нетрудно видеть, что подобным же образом, не прибегая к последовательному сложению, мы можем вычислить сумму любого ряда целых последовательных чисел до любого данного числа. Например, сумма всех чисел от 1 до 100 будет равна половине сто раз взятого 101, т. е. 5050.

39. Сбор яблок

На расстоянии метра одно от другого лежат в ряд сто яблок, и на расстоянии метра же от первого яблока садовник принес и поставил корзину. Спрашивается, какой длины путь совершит он,

если возьмется собрать эти яблоки так, чтобы брать их последовательно одно за другим и каждое отдельно относить в корзину, которая все время стоит на одном и том же месте?

40. Бой часов

Сколько ударов в сутки делают часы с боем?

41. Сумма натуральных чисел

Как найти сумму n первых натуральных чисел?

С частными случаями этой задачи мы уже встречались в предыдущих задачах. Представим теперь идею решения геометрически. Возьмем прямоугольник; боковую сторону его разделим на n равных частей, а основание на $n + 1$ частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Получим сетку, разбивающую его на $n(n + 1)$ маленьких равных прямоугольников (рис. 21).

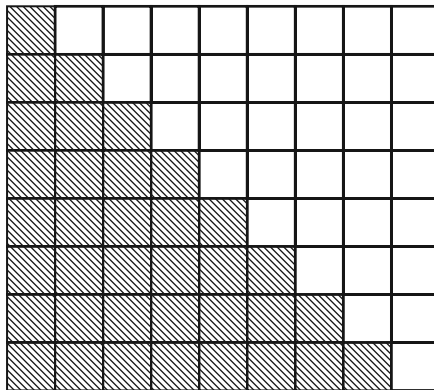


Рис. 21

Рисунок выполнен для случая $n = 8$. Заштрихуем теперь клетки так, как показано на рисунке. Число заштрихованных клеток выразится суммой

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Но и количество белых клеток, если считать их по столбцам справа налево, равно тому же числу. Значит,

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \times (n + 1),$$

откуда и получаем ответ: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

42. Сумма нечетных чисел

Посмотрите на таблицу:

$$1 = 1^2,$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Может быть, эта закономерность (сумма подряд стоящих нечетных чисел, начиная с 1, равна квадрату их числа) сохраняется и дальше. Как это проверить?

ПЕРЕПРАВЫ И РАЗЪЕЗДЫ

43. Через ров

Четырехугольное поле окружено рвом, ширина которого всюду одинакова (рис. 22). Даны две доски, длина каждой из которых равна точно ширине рва, и требуется с помощью этих досок устроить переход через ров.

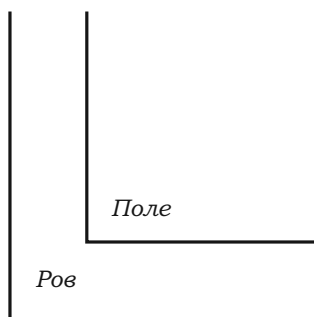


Рис. 22

44. Отряд солдат

Отряд солдат подходит к реке, через которую необходимо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг командир замечает двух мальчиков, которые катаются на лодке недалеко от берега. Но лодка так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков — не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

45. Волк, коза и капуста

Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?

46. Переправа трех рыцарей с оруженосцами

Три рыцаря, каждый в сопровождении оруженосца, съехались на берегу реки, намереваясь переправиться на другую сторону. Им удалось найти маленькую двухместную лодку, и переправа произошла бы легко, ведь лошади могли перебраться вплавь. Но одно затруднение чуть было не помешало этому предприятию. Все оруженосцы, словно сговорившись, наотрез отказались оставаться в обществе незнакомых рыцарей без своих хозяев. Не помогли ни уговоры, ни угрозы. Трусливые оруженосцы упорно стояли на своем. И все же переправа состоялась, все шесть человек благополучно перебрались на другой берег с помощью одной двухместной лодки. При этом соблюдалось условие, на котором настаивали оруженосцы. Как это было сделано?

47. Переправа четырех рыцарей с оруженосцами

Можно ли совершить переправу при тех же условиях, если к реке подъехали четыре рыцаря с оруженосцами?

48. Переправа в трехместной лодке

К реке подъехали четыре рыцаря с оруженосцами и обнаружили одну трехместную лодку. Могут ли они переправиться на другой берег, соблюдая условие предыдущих задач?

49. Переправа через реку с островом

Четыре рыцаря с оруженосцами должны переправиться через реку на лодке без гребца, которая вмещает не более двух человек. Посреди реки есть остров, на котором можно высаживаться. Спрашивается, как совершить эту переправу так, чтобы ни на

берегах, ни на острове, ни в лодке ни один оруженосец не находился в обществе чужих рыцарей без своего хозяина?

50. На станции железной дороги

Поезд Б приближается к станции железной дороги, но его нагоняет быстрее идущий поезд А, который необходимо пропустить вперед. У станции от главного пути отходит боковая ветка, куда можно отвести на время вагоны с главного пути, но ветка эта настолько короткая, что на ней не помещается весь поезд Б. Спрашивается, как все-таки пропустить поезд А вперед?

51. Разъезд шести пароходов

По каналу, один за другим, идут три парохода: А, Б, В. Навстречу им показались еще три парохода, которые тоже идут один за другим: Г, Д, Е. Канал такой ширины, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в канале с одной стороны есть залив, в котором может поместиться только один пароход. Могут ли пароходы разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему?

ДЕЛЕЖИ ПРИ ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫХ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАХ

52. Вместо мелких долей крупные

Разделить поровну 5 пряников между шестью мальчиками, не разрезая ни одного пряника на 6 равных частей.

Подобных задач можно, конечно, придумать сколько угодно. Так, например, в данной задаче вместо чисел 5 и 6 могут быть поставлены следующие числа: 7 на 12, 7 на 6, 7 на 10, 9 на 10, 11 на 10, 13 на 10, 5 на 12, 11 на 12, 13 на 12, 9 на 14, 11 на 14, 13 на 14, 15 на 14, 17 на 14 и т. д.

Во всех задачах подобного рода требуется мелкие доли перевести в более крупные. Разнообразить задачи можно всячески, предлагая, например, такие вопросы:

Можно ли 5 листов бумаги разделить между восемью учениками, не деля ни одного листа на восьмые доли?

Подобные задачи очень полезны для отчетливого и быстрого понимания смысла дробей.

53. Кто прав?

Два лесоруба, Никита и Павел, работали вместе в лесу и сели завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла — 7. Тут к ним подошел охотник.

— Вот, братцы, заблудился в лесу, до деревни далеко, а есть очень хочется; поделитесь со мною хлебом-солью!

— Ну, что ж, садись; чем богаты, тем и рады, — сказали Никита и Павел.

11 лепешек были разделены поровну на троих. После завтрака охотник пошарил в карманах, нашел гривенник и копейку и сказал:

— Не обессудьте, братцы, больше при себе ничего нет. Поделитесь, как знаете!

Охотник ушел, а лесорубы заспорили. Никита говорит:

— По-моему, деньги надо разделить поровну!..

А Павел ему возражает:

— За 11 лепешек 11 копеек. И на лепешку приходится по копейке. У тебя было 4 лепешки, тебе 4 копейки, у меня 7 лепешек, мне 7 копеек!..

Кто из них сделал правильный расчет?

54. Спор

Трое крестьян Иван, Петр и Николай за выполненную работу получили мешок зерна. На беду под рукой не оказалось мерки и пришлось делить зерно «на глазок». Старший среди крестьян — Иван, рассыпал зерно на три кучи, как он считал, поровну:

— Первую кучу возьми ты, Петр, вторая достанется Николаю, а третья мне.

— Я не согласен на это, — возразил Николай, — моя куча зерна ведь самая маленькая.

Поспорили крестьяне. Чуть до ссоры не дошло. Пересыпают зерно из одной кучи в другую, из другой в третью и никак к согласию не придут, обязательно кто-нибудь недоволен.

— Будь мы вдвоем, я да Петр, — вскричал в сердцах Иван, — я бы мигом разделил. Рассыпал бы зерно на две равные кучи и предложил бы Петру выбрать любую, а оставшуюся взял бы себе. Оба мы были бы довольны. А тут не знаю как и быть.

Задумались крестьяне, как же разделить зерно, чтоб все были довольны, чтоб каждый был уверен, что получил не меньше трети. И придумали.

Придумайте и вы.

55. Дележ между тремя

Три человека должны поделить между собой 21 бочонок, из которых 7 бочонков полных вина, 7 полных наполовину и 7 пустых. Спрашивается, как они могут поделиться так, чтобы каждый имел одинаковое количество вина и одинаковое количество бочонков, причем переливать вино из бочонка в бочонок нельзя.

56. Дележ между двумя

Двое должны разделить поровну 8 ведер вина, находящегося в восьмиведерном бочонке. Но у них есть еще только два пустых бочонка, в один из которых входит 5 ведер, а в другой — 3 ведра. Спрашивается как они могут разделить это вино, пользуясь этими тремя бочонками?

57. Дележ пополам

Как быть, если в условии предшествующей задачи полный бочонок 16-ведерный, а пустые 11- и 6-ведерные?

58. Дележ кваса

Имеются три бочонка вместимостью 6 ведер, 3 ведра и 7 ведер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведер кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну.

СКАЗКИ И СТАРИННЫЕ ИСТОРИИ

59. Как гусь с аистом задачу решали

Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А передний старый гусь ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если б нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей, а теперь... Вот и рассчитай-ка, сколько нас?»

Полетел одинокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и с какой стороны ни принимался, никак не мог этой задачи решить. Вот увидел гусь на берегу пруда аиста: ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист — птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стоит и все думает, видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стаю товарищей встретил и какую ему гусь-вожак загадку задал, а он никак этой задачи решить не может.

— Гм!..— откашлялся аист, —попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять. Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! —ответил гусь.

— Ну вот. Как тебе сказали? Если бы к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! —ответил гусь.

— Теперь смотри, —сказал аист. —Вот что я тебе начерчу здесь на прибрежном песке.

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой же черты, затем четверть черты, да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось то, что показано на рис. 23.



Рис. 23

Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, смотрел, но ничего не понимал.

— Понимаешь? — спросил аист.

— Нет еще! — ответил уныло гусь.

— Эх, ты! Ну, вот смотри: как тебе сказали, —стая, еще стая, да половина стаи, да четверть стаи, да ты, гусь, —так я и нарисовал: черту, да еще черту, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую черточку, т. е. тебя. Понял?

— Понял! —весело проговорил гусь.

— Если к встреченной тобою стае прибавить еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, да тебя, гуся, то сколько получится?

— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже черточку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист носом изобразил на песке то, что показано на рис. 24.



Рис. 24

— Теперьобрази-ка, —продолжал аист, —четверть стаи да полстаи —сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстаи, вдвое больше, чем линия четверти стаи, т. е. в половине заключается две четверти. Значит, половина да четверть стаи —это все равно что три четверти стаи!

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну, а в *целой* стае сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Но мы имеем здесь стаю, да еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, и это составит 99 гусей. Значит, если перевести все на четверти, то сколько всего четвертей будет?

Гусь подумал и ответил:

— Стая — это все равно что 4 четверти стаи, да еще стая — еще 4 четверти стаи, всего 8 четвертей; да в половине стаи 2 четверти, всего 10 четвертей; да еще четверть стаи, всего 11 четвертей стаи; и это составит 99 гусей.

— Так! — сказал аист. — Теперь скажи, что же ты, в конце концов, получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в одиннадцати четвертях встреченной мною стаи заключается 99 гусей.

— А, значит, в одной четверти стаи сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стаи — 9 гусей.

— Ну, а в *целой* стае сколько?

— В *целой* заключается четыре четверти... Я встретил 36 *гусей*, — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам, небось, не мог дойти!.. Эх, ты... гусь!..

60. Крестьянин и черт

Идет крестьянин и плачется: «Эхма! Жизнь моя горькая! Заела нужда совсем! Вот в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они еще деньги получают? Право, хоть бы кто помочь мне захотел».

Только успел это сказать, как глядь, а перед ним чѐрт стоит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. И это совсем нетрудно. Вот видишь этот мост через реку?

— Вижу! — говорит крестьянин, а сам заробел.

— Ну, так стоит тебе перейти только через мост — у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдешь назад, опять станет

вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

— Ой ли? — говорит крестьянин.

— Верное слово! — уверяет чёрт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе удваиваю деньги, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки. Иначе не согласен.

— Ну, что же, это не беда! — говорит крестьянин. — Раз деньги все будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не дать? Ну-ка, попробуем!

Перешел он через мост один раз, посчитал деньги. Действительно, стало вдвое больше. Бросил он 24 копейки чёрту и перешел через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, отдал чёрту и перешел через мост в третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько 24 копейки, которые по уговору... он должен был отдать чёрту. Отдал он их и остался без копейки.

Сколько же у крестьянина было денег сначала?

61. Крестьяне и картофель

Шли три крестьянина и зашли на постоялый двор отдохнуть и пообедать. Заказали хозяйке сварить картофель, а сами заснули. Хозяйка сварила картофель, но не стала будить постояльцев, а поставила миску с едой на стол и ушла. Проснулся один крестьянин, увидел картофель и, чтобы не будить товарищей, сосчитал картофель, съел свою долю и снова заснул. Вскоре проснулся другой; ему невдомек было, что один из товарищей уже съел свою долю, поэтому он сосчитал весь оставшийся картофель, съел третью часть и опять заснул. После него проснулся третий; полагая что он проснулся первым, он сосчитал оставшийся в чашке картофель и съел третью часть. Тут проснулись его товарищи и увидели, что в чашке осталось 8 картофелин. Тогда только объяснилось дело. Сосчитайте, сколько картофелин подала на стол хозяйка, сколько съел уже и сколько должен еще съесть каждый, чтобы всем досталось поровну.

62. Два пастуха

Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!» А Петр ему отвечает: «Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!»

Сколько же было у каждого овец?

63. Недоумение крестьянок

Две крестьянки продавали на базаре яблоки. Одна продавала за 1 коп. 2 яблока, а другая за 2 коп. 3 яблока.

У каждой в корзине было по 30 яблок, так что первая рассчитывала выручить за свои яблоки 15 коп., а вторая 20 коп. Обе вместе они должны были выручить 35 коп. Сообразив это, крестьянки, чтобы не ссориться да не перебивать друг у друга покупателей, решили сложить свои яблоки вместе и продавать их сообща, причем они рассуждали так: «Если я продаю пару яблок за копейку, а ты — три яблока за 2 копейки, то, чтобы выручить свои деньги, надо нам, значит, продавать пять яблок за 3 копейки».

Сказано — сделано. Сложили торговки свои яблоки вместе (получилось всего 60 яблок) и начали продавать по 3 коп. за 5 яблок.

Распродали и удивились: оказалось, что за свои яблоки они выручили 36 коп., т. е. на копейку больше, чем думали выручить! Торговки задумались, откуда взялась «лишняя» копейка и кому из них следует ее получить? И как, вообще, им поделить теперь все вырученные деньги?

И в самом деле, как это вышло?

Пока эти две крестьянки разбирались в своей неожиданной прибыли, две другие, прослышав об этом, тоже решили заработать лишнюю копейку.

У каждой из них было тоже по 30 яблок, но продавали они так: первая давала за одну копейку пару яблок, а вторая за копейку давала 3 яблока. Первая после продажи должна была, значит, выручить 15 коп., а вторая — 10 коп.; обе вместе выручили бы, следовательно, 25 коп. Они и решили продать свои яблоки сообща, рассуждая совсем так, как и те две первые торговки: если я продаю за одну копейку пару яблок, а ты за копейку продаешь 3

яблока, то, значит, чтобы выручить свои деньги, нам нужно каждые 5 яблок продавать за 2 коп.

Сложили они яблоки вместе, распродали их по 2 коп. за каждые пять штук, и вдруг... оказалось, что они выручили всего 24 коп., значит, недовыручили целую копейку.

Задумались и эти крестьянки: как же это могло случиться и кому из них придется этой копеечкой полатиться?

64. Находка

Четверо крестьян — Сидор, Карп, Пахом и Фока — возвращались из города и говорили, что ничего не заработали.

— Эх! — сказал Сидор, — если бы мне найти кошель с деньгами, я бы взял себе только третью часть, а остальные с кошельем даже отдал бы вам.

— А я, — молвил Карп, — поделил бы между всеми нами поровну.

— Я доволен был бы всего пятой частью, — отозвался Пахом.

— С меня же довольно бы и шестой части, — сказал Фока. — Да что толковать... Статочное ли дело — деньги на дороге найти! Кто это их для нас бросит?..

Вдруг и на самом деле видят на дороге кошелек, подняли его и решили поделить деньги так, как каждый только что говорил, т. е. Сидор получит треть, Карп — четверть, Пахом — пятую, а Фока — шестую часть найденных денег.

Открыли кошелек и нашли в нем 8 кредитных билетов: один в 3 рубля, а остальные рублевые, пятирублевые и десятирублевые. Но ни один крестьянин не мог взять своей части без размена. Поэтому решили ждать, не разменяет ли кто из проезжих. Скачет верховой; крестьяне останавливают его.

— Так и так, — рассказывают они, — нашли кошелек с деньгами; деньги хотим разделить так-то. Будь такой добрый, разменяй нам рубль!

— Рубля я вам не разменяю, а давайте мне кошелек с деньгами: я положу туда свою рублевку и из всех денег выдам каждому его долю, а кошелек мне.

Крестьяне с радостью согласились. Верховой сложил все деньги вместе, выдал первому $\frac{1}{3}$, второму $\frac{1}{4}$, третьему $\frac{1}{5}$, четвертому $\frac{1}{6}$ всех денег, а кошелек спрятал себе за пазуху.

— Ну, спасибо вам, братцы, большое: и вам хорошо, и мне хорошо! — и ускакал.

Задумались мужики.

— За что же он нас поблагодарил?

— Ребята, сколько у нас всего бумажек? — спросил Карп.

Сосчитали — оказалось 8.

— А где же трехрублевка? У кого она?

— Ни у кого нет!

— Как же так, ребята? Верховой-то, значит, надул нас? Давай считать, на сколько он обидел каждого...

Прикинули в уме.

— Нет, братцы, я получил больше, чем мне следовало! — сказал Сидор.

— И я получил на 25 коп. больше, — сказал Карп.

— Как же так? Всем дал больше, чем нужно, а трехрублевку увез! Ишь ты, как ловко нас обошел! — решили крестьяне.

Сколько денег нашли крестьяне? Обманул ли их верховой? Какие бумажки дал он каждому?

65. Дележ верблюдов

Старик, имевший трех сыновей, распорядился, чтобы они после его смерти поделили принадлежащее ему стадо верблюдов так, чтобы старший взял половину всех верблюдов, средний — треть и младший — девятую часть всех верблюдов. Старик умер и оставил 17 верблюдов. Сыновья начали дележ, но оказалось, что число 17 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 9. В недоумении, как им быть, братья обратились к мудрецу. Тот приехал к ним на собственном верблюде и разделил по завещанию. Как он сделал?

66. Сколько воды в бочке?

В одной сказке хозяин, нанимая работника, предложил ему следующее испытание:

— Вот тебе бочка, наполни ее водой ровно наполовину, ни больше, ни меньше. Но смотри, палкой, веревкой или чем-либо другим для измерения не пользуйся.

Работник справился с заданием. Как он это сделал?

67. Расстановка часовых

Вдоль стен квадратного бастиона требовалось поставить 16 часовых. Комендант разместил их так, как показано на рис. 25, по 5 человек с каждой стороны. Затем пришел полковник и, недовольный размещением часовых, распорядился расставить солдат так, чтобы с каждой стороны было их по 6. Вслед за комендантом пришел генерал, рассердился на полковника за его распоряжение и разместил солдат по 7 человек с каждой стороны. Каково было размещение в двух последних случаях?

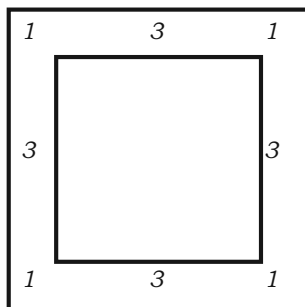


Рис. 25

68. Обманутый хозяин

Хозяин устроил в своем погребе шкаф в форме квадрата с девятью отделениями. Среднее (внутри) отделение он оставил свободным для пустых бутылок, а в остальных расположил 60 бутылок вина так, что в каждом угловом отделении их было по 6, а в каждом из средних по 9. Таким образом, на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке (рис. 26).

6	9	6
9		9
6	9	6

Рис. 26

Слуга подметил, что хозяин проверяет число бутылок, только считая бутылки по сторонам квадрата и следя за тем, чтобы на каждой стороне квадрата было по 21 бутылке. Тогда слуга унес сначала 4 бутылки, а остальные расставил так, что вновь получилось по 21 на каждой стороне. Хозяин пересчитал бутылки своим обычным способом и подумал, что бутылок остается то же число и что слуга только переставил их. Слуга воспользовался оплошностью хозяина и снова унес 4 бутылки, расставив остальные так, что на каждой стороне квадрата выходило опять по 21 бутылке. Так он повторял, пока было возможно. Спрашивается, сколько раз он брал бутылки и сколько всего бутылок он унес?

69. Сказка об Иване-царевиче и Кашее Бессмертном, умевшем считать только до десяти

Из этой сказки мы приведем только отрывки. Сказка очень занимательна, но нас интересуют возникающие в ней математические задачи.

«В некотором царстве, в некотором государстве жил был Иван-царевич. У него было три сестры: одна Марья-царевна, другая Ольга-царевна, третья Анна-царевна. Отец и мать у них померли. Отдал Иван-царевич сестер своих замуж за царей медного, серебряного и золотого царств, остался один. Целый год жил без сестер, и сделалось ему скучно. Решил он идти искать сестриц, проведать их».

Далее сказка рассказывает, как повстречал Иван-царевич Елену Прекрасную, как полюбили они друг друга, как похитил ее Кашей Бессмертный и решил сделать женой своей. Отказалась Елена Прекрасная быть женой Кашея, и в злобе превратил он ее в тонкую белую березку.

«Иван-царевич собрал воинов и поехал искать свою любимую. Долго странствовал он, пока приехал к избушке бабы-яги. Рассказал он ей, куда и зачем путь держит. Баба-Яга давно враждовала с Кашеем, согласилась она помочь Ивану-царевичу:

— Чтобы снять чары Кашеевы, нужно собрать у ворот его двorca царей трех царств: медного, серебряного и золотого. Ровно в полночь должны они и ты вместе с ними произнести волшебное слово. Тогда чары спадут и Кашей бессилен будет что-либо сделать.

Черный ворон подслушал этот разговор бабы-яги с Иваном-царевичем и рассказал обо всем Кашею.

Прощаясь с Иваном-царевичем, дала ему баба-яга волшебное кольцо.

— Оно приведет к Кашею. А коль нужно будет тебе, Иван-царевич, какой запор отпереть или замкнуть накрепко, проси кольцо о том. Мигом исполнит.

Кашей Бессмертный подстерег Ивана-царевича, схватил его и бросил вместе с воинами в глубокое подземелье.

— Не видать тебе, Ивашка, Елены Прекрасной, как ушей своих». Далее в сказке следует описание подземелья. В квадратной пещере было 8 погребов, расположенных вдоль стен (мы изобразили их условно на рис. 27 в виде маленьких квадратиков). Погребы сообщались между собой, а всё подземелье, имевшее один выход, накрепко запиралось семью замками. Всех воинов вместе с Иваном-царевичем было 24, и Кашей разместил их в 8 погребах поровну.

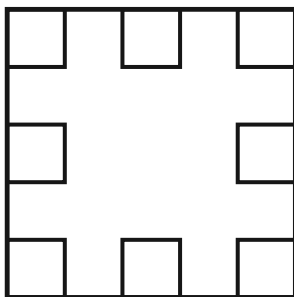


Рис. 27

Каждый вечер приходил он в подземелье, издевался над Иваном-царевичем и пересчитывал своих пленников. Считать Кашей умел только до десяти, поэтому он проверял число узников, находящихся в трех погребах вдоль каждой стены подземелья, находил всюду 9 человек и успокаивался.

Трудности не сломили Ивана-царевича. С помощью волшебного кольца отпер он все семь запоров и отправил трех своих воинов гонцами к царям медного, серебряного и золотого царств.

А чтобы Кашей ничего не заподозрил, Иван-царевич рассадил оставшихся воинов по погребам иначе, сохранив вдоль каждой стены подземелья по 9 человек.

Как всегда, вечером пришел Кашей, поворчал, что воины не сидят спокойно на месте. Пересчитал их вдоль каждой стены и ничего не заподозрил.

Спустя некоторое время гонцы добрались до царей медного, серебряного и золотого царств, рассказали им всю историю и вместе с ними вернулись в подземелье Кашеева дворца.

Как раз в этот момент Кашей решил осмотреть подземелье. Иван-царевич рассадил всех своих воинов и трех прибывших царей так, что опять в погребках вдоль каждой стены сидело по 9 человек. И опять ему удалось обмануть Кашея.

После этого в сказке повествуется, как ровно в полночь три царя вместе с Иваном-царевичем подошли к воротам Кашеева дворца и произнесли волшебное слово, как спали чары с Елены Прекрасной, как удалось им всем выбраться из Кашеева царства и, наконец, о свадьбе Ивана-царевича и Елены Прекрасной.

Сказка кончилась, но остался вопрос: как рассаживал узников Иван-царевич?

70. За грибами

Дедушка пошел с четырьмя внучатами в лес за грибами. В лесу разошлись в разные стороны и стали искать грибы. Через полчаса дедушка сел под дерево отдохнуть и пересчитал все грибы: их оказалось 45 штук. Тут прибежали к нему внучата, все с пустыми руками, ни один ничего не нашел.

— Дедушка! — просит один внук, — дай мне своих грибов, чтобы кузовок не был пустой. Авось, с твоей легкой руки много грибов наберу.

— И мне, дедушка!

— И мне дай!

Дед дал каждому и роздал, таким образом, детям все свои грибы. Все снова разбрелись в разные стороны, и случилось следующее. Один мальчик, нашел еще 2 гриба, другой 2 потерял, третий нашел еще столько, сколько получил от деда, а четвертый потерял

половину полученных от деда. Когда дети пришли домой и подсчитали свои грибы, то оказалось у всех поровну.

Сколько каждый получил от бабушки грибов и сколько было у каждого, когда они пришли домой?

71. Сколько было?

Женщина несла для продажи корзину яиц. Встретившийся прохожий по неосторожности так толкнул ее, что корзина упала на землю и все яйца разбились. Прохожий захотел уплатить женщине стоимость разбитых яиц и спросил, сколько их всего было. «Я не помню этого, — сказала женщина, — знаю только хорошо, что когда я перекладывала яйца по 2, то оставалось одно яйцо. Точно так же всегда оставалось по одному яйцу, когда я перекладывала их по 3, по 4, по 5 и по 6. Когда же я перекладывала их по 7, то не оставалось ни одного яйца».

Сколько было яиц?

72. Часы поставлены верно

Двое приятелей, Петр и Иван, живут в одном городе не очень далеко друг от друга. У каждого из них дома имеются только настенные часы. Однажды Петр забыл завести свои часы и они остановились. «Пойду-ка я в гости к Ивану, заодно и посмотрю, который час», — решил Петр. Отправившись в гости и просидев у Ивана некоторое время, Петр вернулся домой и верно поставил свои настенные часы. Смогли бы вы сделать так же?

73. Восстановление записи

В памятной книжке найдена запись, воспроизведенная на рис. 28. Эта запись оказалась залитою в некоторых местах чернилами так, что нельзя разобрать ни числа проданных кусков, ни первых трех цифр полученной суммы.

*За продажу * кусков сукна по 49 руб. 36 коп.
каждый кусок получил * 7 руб. 28 коп.*

Рис. 28

Спрашивается, можно ли по сохранившимся данным узнать число проданных кусков и всю вырученную сумму?

74. Хитрецы

В трактире стояло четыре стола, по одному вдоль каждой стены. Проголодавшиеся, возвращавшиеся с маневров солдаты в числе 21 человека остановились там пообедать и пригласили к обеду хозяина. Расселись все так: за тремя из столов сели солдаты — по 7 за каждый стол, а за четвертым столом сел хозяин (на рис. 29 солдаты и хозяин изображены черточками).

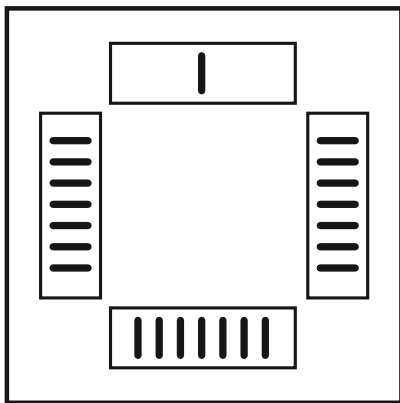


Рис. 29

Солдаты уговорились с хозяином, что платить по счету будет тот, кто останется последним при следующем условии: считая по кругу (по часовой стрелке) всех, в том числе и хозяина, освобождать от уплаты каждого седьмого. Каждый освобожденный тотчас уходил из трактира и в дальнейшем в счете не участвовал. А последним остался хозяин. С кого начали счет?

С кого нужно было бы начать, если бы солдат было только по 4 за каждым из трех столов?

75. Спор кучера с пассажиром

На постоялом дворе нетерпеливый проезжий, увидя кучера, спросил:

— Не пора ли запрягать?

— Что вы! — ответил кучер, — еще полчаса до отъезда. За это время я успею двадцать раз и запрячь, и отпрячь, и опять запрячь. Нам не впервой...

— А сколько в карету впрягается лошадей?

— Пять.

— Сколько времени полагается на запряжку лошадей?

— Да минуты две — не больше.

— Ой ли? — усомнился проезжий. — Пять лошадей запрячь в две минуты. Что-то уж очень скоро...

— И очень просто, — отвечал кучер. — Выведут лошадей в сбруе, постромках с вальками, в вожжах. Остается только накинуть кольца вальков на крюки, приструнить двух средних лошадей к дышлу, взял вожжи в руки, сел на козлы и готово... Поезжай! Дело знакомое...

— Ну, хорошо! — заметил пассажир. — Допустим, что таким образом можно запрячь и отпрячь лошадей хоть двадцать раз в полчаса. Но если их придется перепрягать одну на место другой, да еще всех, то уж этого никогда не сделать не только в пол, но и в два часа.

— Тоже пустячное дело! — расхвастался кучер. — Разве нам не приходится перепрягать! Да какими угодно способами я их всех перепрягу в час, а то и меньше. Одну лошадь поставил на место другой, и готово! Минутное дело!

— Нет, ты перепряги их не теми способами, которые мне удобны, — сказал пассажир, — а всеми способами, какими только можно перепрячь пять лошадей, считая на перепряжку одну минуту, как ты хвастаешь.

Самолюбие кучера было несколько задето.

— Конечно, всех лошадей и всеми способами перепрягу не больше как за час.

— Я дал бы сто рублей, чтобы посмотреть, как ты сделаешь это за час! — сказал пассажир.

— А я при своей бедности заплачу за ваш проезд в карете, если этого не сделаю, — ответил кучер.

Так и условились. Каков был результат спора?

76. Кто на ком женат?

Трое крестьян, Иван, Петр и Алексей, пришли на рынок с женами: Марией, Екатериной и Анной. Кто на ком женат, нам не известно. Требуется узнать это на основании следующих данных: каждый из этих шести человек заплатил за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов он купил. Каждый мужчина истратил на 48 копеек больше своей жены. Кроме того, Иван купил на 9 предметов больше Екатерины, а Петр — на 7 предметов больше Марии.

УПРАЖНЕНИЯ

С КУСКОМ БУМАГИ

Вряд ли кто из наших читателей не умеет сам из квадратного куска бумаги сделать «петушка», лодочку, кораблик, коробочку и т. д. Достигается это путем разнообразного перегибания и складывания бумажного квадрата. Полученные при этом сгибы (складки) позволяют придавать взятому куску бумаги ту или иную желаемую форму. Сейчас мы убедимся, что с помощью перегибания бумаги можно не только делать забавные или интересные игрушки, но и получить наглядное представление о многих фигурах на плоскости, а также об их свойствах. Кусок обыкновенной белой (а еще лучше — цветной) бумаги и перочинный ножик для разглаживания или удаления ненужных частей могут оказаться прекрасным пособием для усвоения начал геометрии.

Сгибая кусок бумаги, совместим какие-либо две точки, затем, прижав их друг к другу пальцем, разгладим ножом сгиб. Каждый, наверное, не один раз проделывал это. Но задумывались ли вы когда-нибудь, почему линия сгиба обязательно получается прямой? Если подумать, то легко увидеть в этом проявление одной из геометрических теорем, а именно теоремы о том, что совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух фиксированных, есть прямая линия.

Очень полезно подыскивать геометрические обоснования и в последующих задачах.

77. Прямоугольник

Имеется кусок бумаги неправильной формы. Как, пользуясь только перочинным ножом, вырезать из него прямоугольник?

78. Квадрат

Из прямоугольника сгибанием получить квадрат?

Исследуем теперь некоторые свойства получившегося квадрата. Линия сгиба, проходящая через два противоположных угла квадрата, есть *диагональ* этого квадрата. Другая диагональ получается перегибом квадрата через другую пару противоположных углов, как это видно на рис. 30. Непосредственным наложением убеждаемся, что диагонали квадрата пересекаются друг с другом под прямыми углами и что в точке пересечения они взаимно делятся пополам. Эта точка пересечения диагоналей квадрата называется *центром* квадрата.

Каждая диагональ делит квадрат на два совпадающих при наложении *треугольника*, вершины которых находятся в противоположных углах квадрата. Каждый из этих треугольников имеет, очевидно, по две равные стороны, т. е. эти треугольники *равнобедренные*. Кроме того, эти треугольники и *прямоугольные*, так как каждый из них имеет по прямому углу.

Две диагонали, как легко видеть, разделяют квадрат на 4 совпадающих при наложении прямоугольных и равнобедренных треугольника, общая вершина которых находится в центре квадрата.

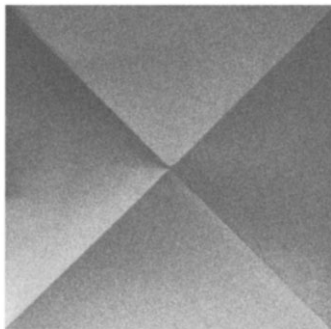


Рис. 30

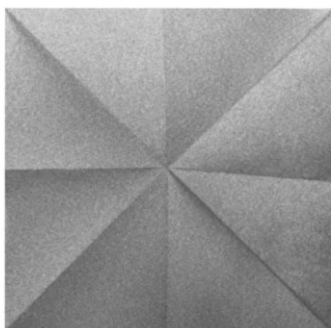


Рис. 31

Перегибем теперь наш бумажный квадрат пополам так, чтобы одна сторона совпала с противоположной ей. Получаем сгиб, проходящий через центр квадрата (рис. 31). Линия этого сгиба обладает, как легко убедиться, следующими свойствами: 1) она *перпендикулярна* двум другим сторонам квадрата, 2) делит эти стороны пополам, 3) *параллельна* двум первым сторонам квадрата, 4) сама делится в центре квадрата пополам, 5) делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольника, 6) каждый из этих прямоугольников *равновелик* (т. е. равен по площади) одному из треугольников, на которые квадрат делится диагональю. Перегибем квадрат еще раз так, чтобы совпадали две другие стороны. Полученный сгиб и сделанный раньше делят квадрат на 4 совпадающих при наложении квадрата (рис. 31).

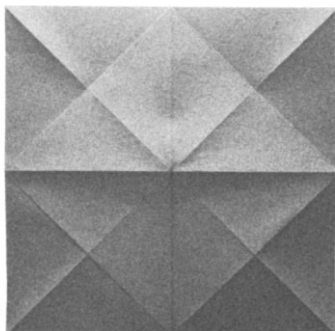


Рис. 32

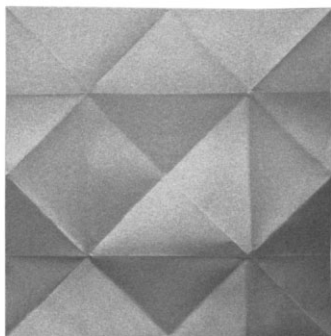


Рис. 33

Перегнем эти 4 меньших квадрата через их углы, лежащие посередине сторон большего квадрата (по диагоналям), и получим квадрат (рис. 32), вписанный в наш начальный квадрат. Этот вписанный квадрат, как легко убедиться, имеет площадь, равную половине площади большого квадрата и имеет тот же центр. Соединяя середины сторон этого внутреннего, вписанного, квадрата, получим квадрат, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади первоначального (рис. 33). Если в этот последний квадрат по предыдущему опять впишем квадрат, то его площадь будет равна $\frac{1}{8}$ площади первоначального. В этот, в свою очередь, можем вписать квадрат, площадь которого равна $\frac{1}{16}$ площади первоначального, и т. д.

Если перегнуть наш квадрат как угодно, но так, чтобы сгиб проходил через центр, то квадрат разделится на две совпадающие при наложении *трапеции*.

79. Равнобедренный треугольник

Из бумажного квадрата сгибанием получить равнобедренный треугольник.

80. Равносторонний треугольник

Как из бумажного квадрата сгибанием получить равносторонний треугольник?

Исследуем некоторые свойства получившегося равностороннего треугольника. Сложим его, накладывая каждую из сторон на основание. Мы получим таким образом три высоты этого треугольника: AA' , BB' , CC' (рис. 34).

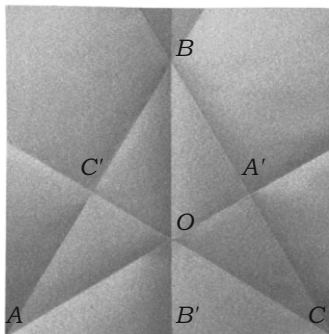


Рис. 34

Вот некоторые свойства равностороннего треугольника, которые можно вывести из рассмотрения полученной нами фигуры на рис. 34.

Каждая из высот разделяет треугольник на два совпадающих при наложении прямоугольных треугольника.

Они делят стороны пополам и перпендикулярны к ним. Они проходят через одну общую точку.

Пусть высоты AA' и CC' встречаются в O . Проведем BO и продолжим ее до встречи с AC в B' . Теперь докажем, что BB' есть третья высота. Из треугольников $C'OB$ и BOA' находим, что $|OC'| = |OA'|$, и убеждаемся, что углы OBC' и $A'BO$ равны. Затем, из треугольников $AB'B$ и $CB'V$ следует, что углы $AB'B$ и $BB'C$ равны, т. е. каждый из них есть прямой угол. Значит, BB' есть высота равностороннего треугольника ABC . Она также делит AC пополам в B' .

Можно, аналогично предыдущему, показать, что OA , OB и OC равны и что также равны OA' , OB' и OC' .

Поэтому из O , как центра, можно описать окружности, которые пройдут соответственно через A , B и C и через A' , B' и C' . Последний круг касается сторон треугольника.

Равносторонний треугольник ABC делится на шесть совпадающих при наложении прямоугольных треугольников, углы которых при точке O равны, и на три таких совпадающих при наложении симметричных четырехугольника, что около них можно описать окружности.

Площадь треугольника AOC равна удвоенной площади треугольника $A'OC$; отсюда $|AO| = 2|OA'|$. Аналогично, $|BO| = 2|OB'|$ и $|CO| = 2|OC'|$. Значит, радиус круга, описанного около треугольника ABC , вдвое больше радиуса вписанного круга.

Прямой угол A квадрата делится прямыми AO и AC на три равные части. Угол BAC равен $2/3$ прямого угла. Углы $C'AO$ и OAB' равны $1/3$ прямого угла каждый. То же относится к углам при B и C .

Шесть углов при O равны $2/3$ прямого каждый.

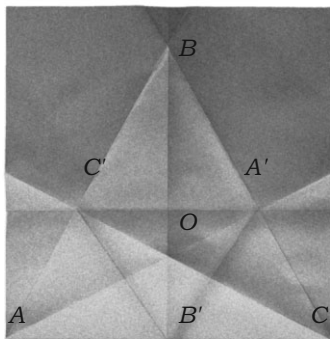


Рис. 35

Перегните бумагу по линиям $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ (рис. 35). В таком случае $A'B'C'$ есть равносторонний треугольник. Его площадь равна $1/4$ площади треугольника ABC . $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ параллельны соответственно AB , BC , CA и равны половинам их. $AC'A'B'$ есть ромб, $C'BA'B'$ и $CB'C'A'$ — также. $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ делят соответственные высоты пополам.

81. Правильный шестиугольник

Как из квадрата получить правильный шестиугольник?

На рис. 36 представлен образец орнамента из равносторонних треугольников и правильных шестиугольников, который вы теперь легко можете построить сами.

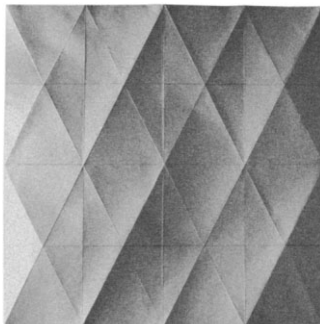


Рис. 36

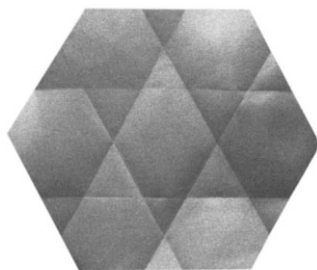


Рис. 37

Можно, в свою очередь, разделить шестиугольник на равные правильные шестиугольники и равносторонние треугольники (рис. 37), делая перегибы через точки, делящие его стороны на три равные части. Получается красивый симметричный орнамент.

Можно получить шестиугольник еще и следующим путем. Возьмем равносторонний треугольник и перегнем его так, чтобы все его вершины сошлись в центре. Из того, что мы уже знаем о равностороннем треугольнике, нетрудно вывести, что сторона полученного шестиугольника равна $\frac{1}{3}$ стороны взятого равностороннего треугольника. Площадь же этого шестиугольника равна $\frac{2}{3}$ площади взятого треугольника.

82. Правильный восьмиугольник

Как в данном квадрате построить правильный восьмиугольник?

83. Оригинальное доказательство

Каждый, изучавший геометрию, знает, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Но мало кому известно, что эта фундаментальная теорема может быть «доказана» с помощью простого лоскутка бумаги.

Мы ставим слово «доказана» в кавычках, потому что это не доказательство в строгом смысле слова, а скорее лишь наглядная демонстрация. Но все же этот остроумный прием очень любопытен и поучителен.

Вырезают из бумаги треугольник любой формы и перегибают его сначала по линии AB (рис. 38) так, чтобы основание треугольника легло на себя. Затем, снова разогнув бумагу, перегибают треугольник по линии CD так, чтобы вершина A попала в точку B .

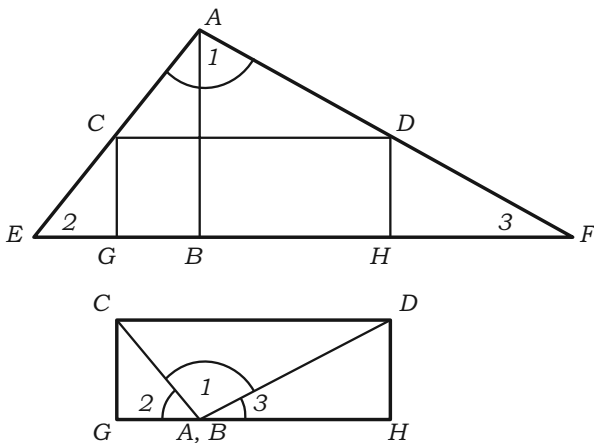


Рис. 38

Перегнув затем треугольник по линиям DH и CG так, чтобы точки E и F попали в точку B , получим прямоугольник $CGHD$ и наглядно убеждаемся, что все три угла треугольника (1 , 2 , 3) составляют в сумме два прямых.

Необычайная наглядность и простота этого приема позволяют познакомить даже детей, не изучавших геометрии, с одной из ее

важнейших теорем. Для знающих же геометрию он представляет интересную задачу — объяснить, почему такое сгибание бумажного треугольника всегда дает желаемый результат. Объяснить это нетрудно, и мы не хотели бы лишить читателя удовольствия самому подыскать геометрическое обоснование этого своеобразного «доказательства».

84. Теорема Пифагора

Показать, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.



Рис. 39

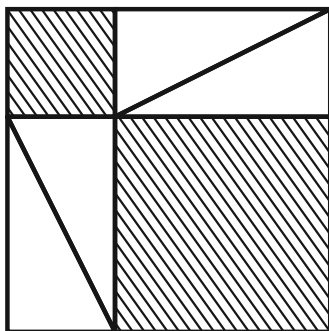


Рис. 40

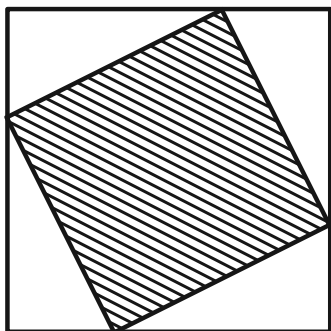


Рис. 41

Нарисуем два равных квадрата, стороны которых равны сумме обоих катетов данного на рис. 39 треугольника. Затем в полученных нами квадратах произведем построения, указанные на рис. 40, 41. Здесь от каждого из равных квадратов мы отнимаем по 4 равных треугольника. Если отнимать от равных величин поровну, то и остатки получатся равные. Эти остатки на рис. 40, 41 заштрихованы; но на рис. 40 получаются два квадрата, построенные на катетах данного треугольника, а на рис. 41 — квадрат, построенный на гипотенузе, и сумма площадей первых двух квадратов равна, следовательно, площади второго.

Мы доказали, таким образом, знаменитую *теорему Пифагора*.

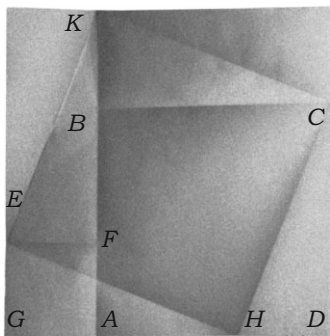


Рис. 42

Другое доказательство той же знаменитой теоремы найдем, если на взятом бумажном квадрате сделаем сгибы, как указано на

рис. 42. Здесь GEH есть прямоугольный треугольник и площадь квадрата, построенного на EH , равна сумме площадей квадратов, построенных на EG и GH .

Призовем теперь на помощь ножницы и будем не только перегибать, но и разрезать бумагу. Так мы придем ко многим интересным и поучительным задачам.

85. Как вырезать?

Пусть фигура состоит из трех равных квадратов, расположенных так, как показано на рис. 43. Вырезать из этой фигуры такую часть, чтобы, приложив ее к оставшейся части, получить квадрат, внутри которого имеется квадратное отверстие.

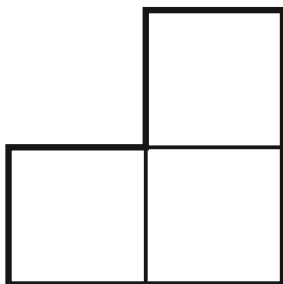


Рис. 43

86. Из прямоугольника — квадрат

Кусок бумаги или картона имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна 4, а другая 9 единицам длины. Требуется разрезать этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их надлежащим образом, получить квадрат.

87. Коврик

У одной хозяйки был прямоугольный коврик размером 120×90 сантиметров. Два противоположных угла его истрепались, пришлось их отрезать (на рис. 44 эти треугольные куски заштрихованы).

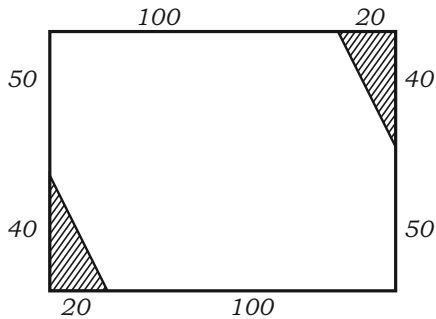


Рис. 44

Но хозяйке все же хотелось иметь коврик в форме прямоугольника. Она поручила мастеру разрезать его на такие две части, чтобы из них можно было сшить прямоугольник, не теряя, конечно, ни кусочка материи. Мастер исполнил желание хозяйки.

Как ему удалось это сделать?

88. Два коврика

У другой хозяйки было два клетчатых коврика: один размером 60×60 см, другой 80×80 см (рис. 45). Она решила сделать из них один клетчатый коврик размером 100×160 см. Мастер взялся выполнить эту работу и пообещал, что каждый коврик будет разрезан не более чем на две части и при этом не будет разрезана ни одна клетка. Обещание свое он сдержал. Как он поступил?

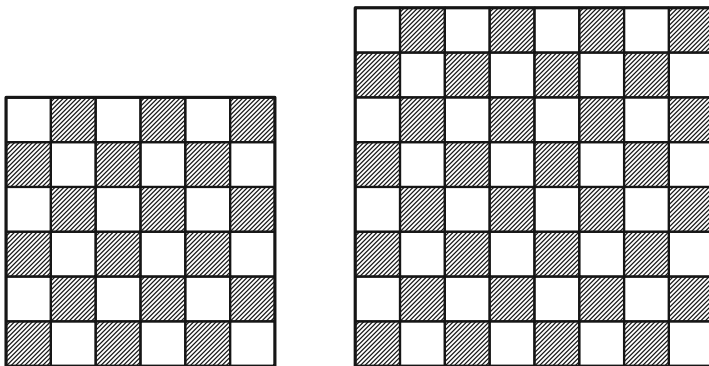


Рис. 45

89. Коврик с розами

На коврике (рис. 46) изображено 7 роз. Требуется тремя прямыми линиями разрезать коврик на 7 частей, каждая из которых содержала бы по одной розе.

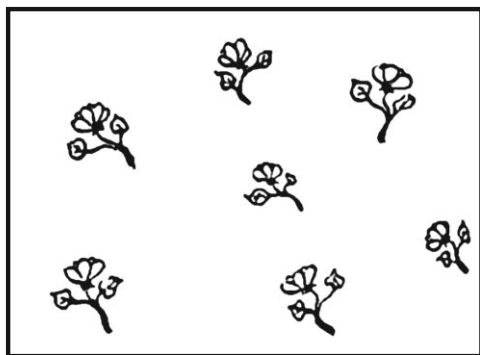


Рис. 46

90. Квадрат на 20 равных треугольников

Разрезать квадратный кусок бумаги на 20 равных треугольников и сложить из них 5 равных квадратов.

91. Из креста — квадрат

Крест, составленный из пяти квадратов, требуется разрезать на такие части, из которых можно было бы составить один квадрат.

92. Из квадрата — три квадрата

Разрезать квадрат на семь таких частей, чтобы, сложив их надлежащим образом, получить три равных квадрата.

Эту задачу можно обобщить:

1. Разрезать квадрат на такие части, из которых можно было бы составить данное число равных квадратов.
2. Разрезать квадрат на наименьшее число частей, которые, соответственно сложенные, давали бы некоторое число равных между собою квадратов.

93. Из квадрата — два квадрата

Разрезать квадрат на 8 таких частей, чтобы, сложив их соответственным образом, получить два квадрата, площадь одного из которых была бы вдвое больше площади другого.

94. Из квадрата — три квадрата

Разрезать квадрат на такие 8 частей, чтобы, соответственно сложенные, они составили 3 квадрата, площади которых были бы пропорциональны числам 2, 3 и 4.

95. Из шестиугольника — квадрат

Разрезать правильный шестиугольник на 5 таких частей, чтобы, соответственно сложенные, они образовали квадрат.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ

96. Загадочное исчезновение

Начертите на прямоугольном куске картона 13 одинаковых палочек на равном расстоянии друг от друга, так, как показано на рис. 47. Теперь разрежьте прямоугольник по прямой MN , проходящей через верхний конец первой палочки и через нижний конец последней. Если затем вы сдвинете обе половины так, как показано на рис. 48, то заметите любопытное явление: вместо 13 палочек перед вами окажется всего 12! Одна палочка исчезла бесследно.

Куда же она девалась?

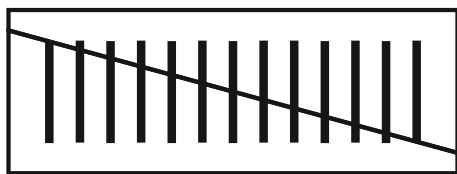


Рис. 47

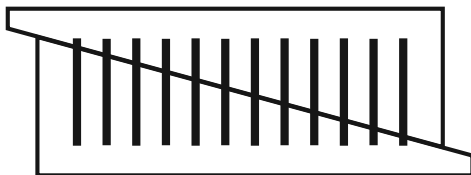


Рис. 48

Если вы сопоставите длины палочек на первом и втором рисунках, то обнаружите, что палочки на втором рисунке на $\frac{1}{12}$ длиннее палочек первого рисунка. Исчезнувшая 13-я палочка улетучилась не бесследно: она словно растворилась в 12 остальных, удлинив каждую из них на $\frac{1}{12}$ своей длины. Геометрическую причину этого понять очень легко.

Прямая MN и та прямая, которая проходит через верхние концы всех палочек, образуют угол, стороны которого пересечены рядом параллельных прямых. Из подобия треугольников следует, что прямая MN отсекает от второй палочки $\frac{1}{12}$ ее длины, от третьей $\frac{2}{12}$, от четвертой $\frac{3}{12}$ и т. д. Когда же мы сдвигаем обе части картона, то приставляем отсеченный отрезок каждой палочки (начиная со второй) к нижней части предыдущей. А так как каждый отсеченный отрезок больше предыдущего на $\frac{1}{12}$, то каждая палочка должна удлиниться на $\frac{1}{12}$ своей длины. На глаз это удлинение незаметно, так что исчезновение 13-й палочки на первый взгляд представляется довольно загадочным.

Чтобы усилить эффект, можно расположить палочки по кругу, как показано на рис. 49. Если вырезать внутренний круг и укрепить его в центре так, чтобы он мог вращаться, то, повернув круг на небольшой угол, мы опять увидим, что одна палочка исчезла (рис. 50).

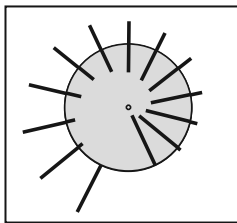


Рис. 49

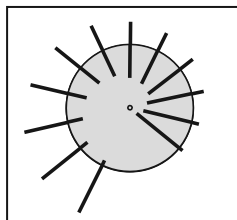
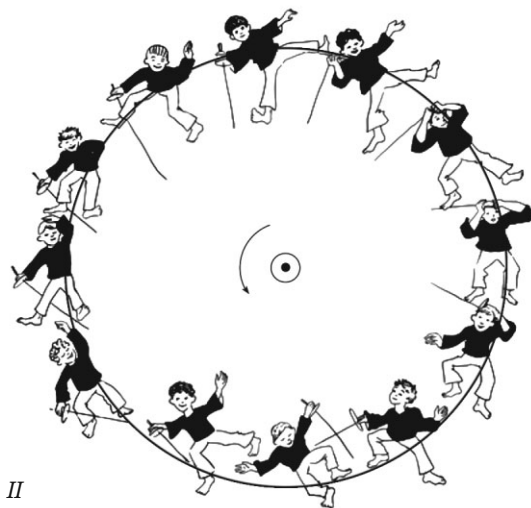
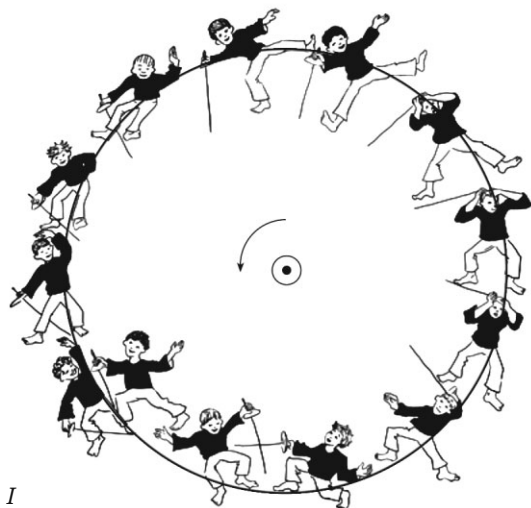


Рис. 50



На только что рассмотренном принципе основана остроумная игрушка-задача, изображенная на рисунках I и II на с. 66)

Вы видите (рис. I на с. 66) арену цирка, по краю которой художник разместил 13 клоунов в весьма воинственных позах. Внутренний диск вырезан и может вращаться вокруг своего центра. И вот, слегка повернув этот круг, вы уничтожаете одного клоуна (рис. II

на с. 66»): вместо прежних 13 перед вами уже всего 12 артистов веселого жанра. Тот клоун, который находился внутри круга и так воинственно наступал на своего собрата, бесследно улетучился!..

Исчезновение клоуна заставило бы вас долго ломать голову, если бы вы не познакомились с рассмотренными выше схематическими примерами. А теперь дело ясно: он «растворился» в дюжине своих собратьев по профессии, как раньше «растворилась» у нас простая палочка.

Надо отдать справедливость художнику: немало потребовалось остроумия и терпения, чтобы достичь такого эффекта!

97. Искусная починка

На дне деревянного судна во время плавания случилась прямоугольная пробоина в 13 см длины и 5 см ширины, т. е. площадь пробоины оказалась равной $13 \text{ см} \times 5 \text{ см} = 65 \text{ см}^2$. Судовой плотник взял квадратную дощечку со стороной квадрата в 8 см (т. е. площадь квадрата равнялась 64 см^2), разрезал ее прямыми линиями на четыре части A , B , C , D так, как это показано на рис. 51, а затем сложил их так, что получился прямоугольник, как раз соответствующий пробоине (рис. 52). Этим прямоугольником он и заделал пробоину. Вышло таким образом, что плотник сумел квадрат в 64 см^2 обратить в прямоугольник с площадью 65 см^2 . Как это могло случиться?

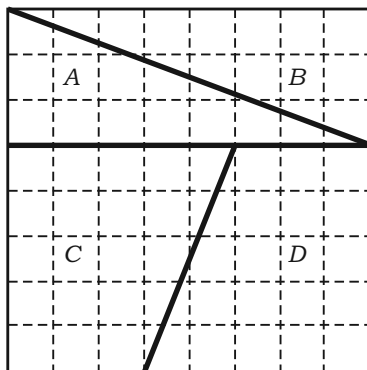


Рис. 51

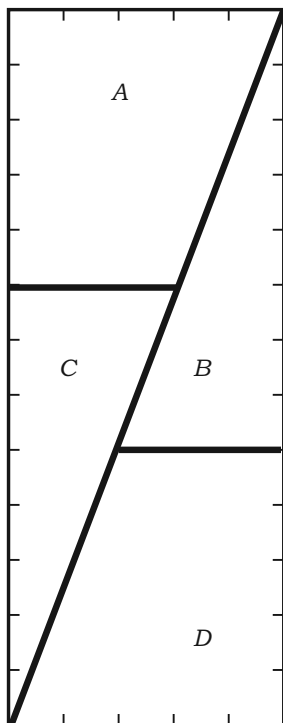


Рис. 52

98. Еще один софизм

Вот еще один «фокус», который можно сделать с квадратом.

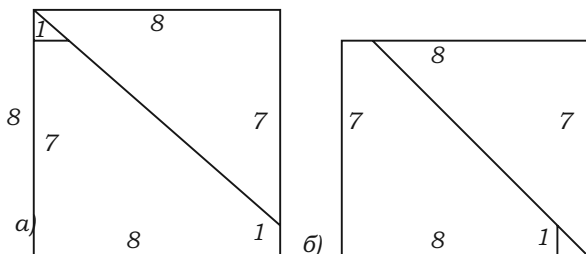


Рис. 53

Возьмем квадрат со стороной 8 см и, следовательно, с площадью 64 см^2 . Разрежем его на три части так, как показано на рис. 53, а. Затем переложим эти части так, как показано на рис. 53, б. Получается прямоугольник, площадь которого «легко вычислить»: $7 \text{ см} \times 9 \text{ см} = 63 \text{ см}^2$. В чем же дело?

99. Похожая задача

Построим прямоугольник со сторонами 11 см и 13 см. Рассечем его диагональю (рис. 54) и сдвинем затем полученные треугольники по их общей гипотенузе в положение, показанное на рис. 55.

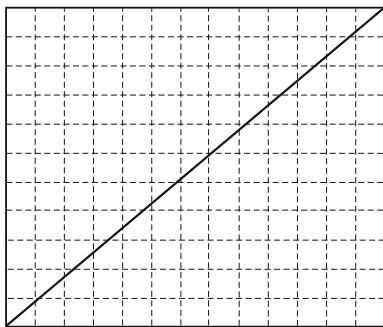


Рис. 54

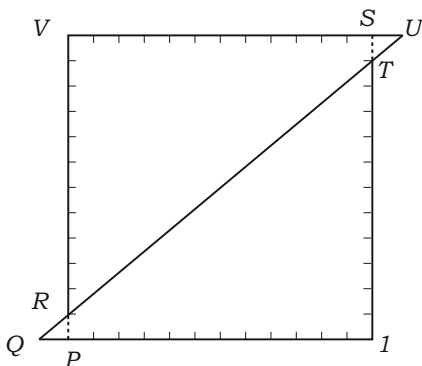


Рис. 55

Эта последняя фигура по виду состоит из квадрата $VRXS$ со сторонами 12 см, т. е. площадью $12^2 \text{ см}^2 = 144 \text{ см}^2$, и двух треугольников PQR и STU , каждый площадью $0,5 \text{ см}^2$. Следовательно, площадь всей фигуры на рис. 55 равна $144 \text{ см}^2 + 2 \times 0,5 \text{ см} = 145 \text{ см}^2$.

Но как же это получилось, если площадь исходного прямоугольника равна только $13 \text{ см} \times 11 \text{ см} = 143 \text{ см}^2$?

100. Земля и апельсин

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и образуется некоторый зазор. Спрашивается, в каком случае этот зазор будет больше — у земного шара или у апельсина?

УГАДЫВАНИЕ ЧИСЕЛ

О каком *угадывании* идет речь?

Конечно, дело, в сущности, сводится не к отгадке, а к решению некоторой задачи. Желающему предлагают задумать число и этого числа у него не спрашивают. Взамен этого предлагают задумавшему произвести над задуманным им числом разные с виду совсем произвольные действия и сказать «угадывающему», что в результате получилось. «Угадчик» получает, таким образом, в руки концы нити, по которой разматывает весь клубок и добирается до начала.

Задаваемые в остроумной и забавной форме, которую каждый играющий может придумать по своему вкусу, задачи эти представляют очень хорошее и полезное развлечение для всех играющих. Они развивают навыки в быстром устном счете и развивают их постепенно, так как можно задумывать малые и большие числа, смотря по желанию и силам участвующих в игре лиц. Теоретические основания подобных задач настолько просты, что мы даем их кратко и коротко. Впрочем, если «доказательства» в нашем изложении кому-либо окажутся не по силам, то он может их смело опустить, а пусть разберется только в самой задаче. Разобравшись, он, почти наверное, сам дойдет до объяснения каждой задачи.

Обращаем внимание на то, что здесь в большинстве случаев даются только сравнительно сухие остоны задач. Читателю предоставляется самая широкая возможность каждое условие подобной задачи украсить плодами собственной выдумки и фантазии или приурочить к известному случаю.

101. Угадать число

Возьмем числа от 1 до 12 и расположим их по кругу (рис. 56). Можно смело взяться угадать задуманное кем-либо число из этого круга.

Можно, очевидно, для той же цели взять часы и предложить угадать задуманный кем-либо час.

Можно также пользоваться домино, очками, лото и т. д. Как же угадать задуманное число?

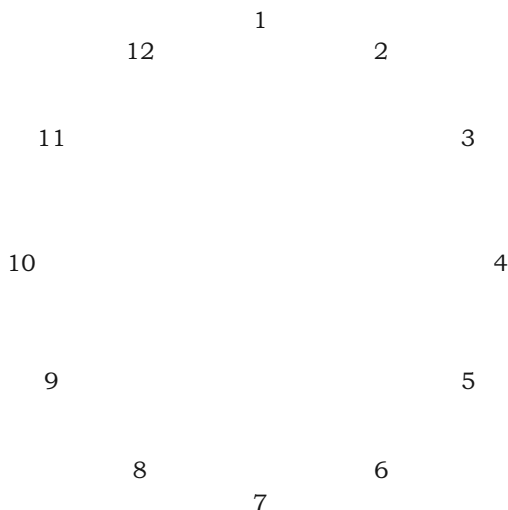


Рис. 56

Пусть кто-либо задумает про себя любое из чисел круга. Затем *укажите* ему сами *любое число* на этом круге и прибавьте про себя к этому числу 12 (т. е. наивысшее число круга). Вы получите некоторое число, и это число вы скажете громко. Пусть потом задумавший считает про себя от задуманного им числа, притрагиваясь сначала к указанному вами числу, а потом к каждому следующему числу по кругу, *идя в обратном порядке*, и пусть считает до сказанного вами громко числа. Когда он досчитает до него, последовательно притрагиваясь к числам, то остановится как раз на задуманном им числе или часе.

Пусть, например, кто-либо задумал на круге 5, а вы указываете, например, 9, прибавляете к нему про себя 12 и получите 21. Затем говорите громко задумавшему:

— Считайте про себя, начиная от задуманного вами числа, до 21, но, начиная счет, притроньтесь сначала к 9, потом к 8, потом к 7 и т. д., идя по кругу в обратном порядке; когда же досчитаете до 21, то скажите это число громко и остановитесь.

Задумавший исполнит сказанное ему, и когда досчитает до 21, то как раз сам укажет *задуманное им число 5*.

Можно обставить эту задачу еще таинственнее, например, так.

Кто-нибудь задумывает какое-нибудь число (например, 5). Вы берете, например, число 9, прибавляете к нему мысленно 12, получаете 21 и говорите задумавшему:

— Теперь я буду стучать карандашом (или пальцем), и при каждом стуке вы прибавляете про себя к задуманному вами числу по единице. Но, когда досчитаете до 21, скажите громко: «21».

Затем стучите по 9, по 8, по 7 и т. д. ..., по 12, по 11 и т. д. ... Задумавший число в это время про себя будет считать 5, 6, 7 и т. д., но когда скажет громко: «21», то окажется, что вы стучите как раз по задуманному им числу.

— Вы задумали число 5! — говорите вы ему.

— Совершенно верно! — ответит вам задумавший, дивясь, как вы могли узнать это, если он сам знает, в чем разгадка этого будто бы фокуса.

102. Сколько осталось предметов?

Предложите своему товарищу взять в каждую руку по одинаковому количеству предметов (например спичек). При этом надо потребовать, чтобы число предметов в одной руке было не меньше, чем некоторое число b . Число взятых предметов вам не известно. Предложите партнеру переложить из правой рук в левую то число предметов, которое вы ему скажете (например, число a ; естественно, что $a < b$). Затем, ничего не показывая и не говоря вам, пусть он отложит из левой руки столько предметов, сколько у него осталось в правой, и, наконец, опять-таки ничего вам не показывая, пусть он отложит в сторону все предметы из правой руки. Теперь вы можете смело утверждать, что у вашего партнера осталось в левой руке $2a$ предметов. Почему?

103. Чему равна разность?

Попросите своего товарища написать любое двузначное число, но пусть затем он поменяет местами в этом числе цифры и вычтет из большего числа меньшее. Если он скажет вам последнюю

цифру разности, то вы сразу скажете, какова вся разность. Как это сделать?

104. Чему равно частное?

Попросите своего товарища написать любое трехзначное число, но только такое, чтобы крайние цифры отличались друг от друга на число, которое вы укажете. Пусть затем он поменяет местами в этом числе крайние цифры. Получится еще одно число. Предложите вашему товарищу вычесть меньшее число из большего. Разность всегда делится на 9, и вы можете всегда сказать наперед, какое будет частное от деления этой разности на 9. Чему же равняется частное?

Эту задачу можно предлагать в следующем более занимательном (особенно для детей) варианте.

105. Число 1089.

Задачу 104 можно предлагать в следующем более занимательном (особенно для детей) варианте.

Напишите на бумажке число 1089, вложите бумажку в конверт и запечатайте его. Затем предложите кому-нибудь, дав ему этот конверт, написать на нем трехзначное число, но такое, чтобы крайние цифры в нем были различны и отличались бы друг от друга более чем на единицу. Пусть затем он поменяет местами крайние цифры и вычтет из большего трехзначного числа меньшее. В результате пусть он опять переставит крайние цифры и получившееся трехзначное число прибавит к разности первых двух. Когда он получит сумму, предложите ему открыть конверт. Там он найдет бумажку с числом 1089, которое, к его удивлению, и есть полученное им число.

Почему так произошло?

106. Какое число задумано?

Попросите своего товарища задумать число, пусть затем он удвоит задуманное число и к полученному произведению прибавит 5. Потом пусть полученное число возьмет пять раз и прибавит к результату число 10. Эту последнюю сумму пусть он умножит еще на 10. Если после этого спросить, какое, в конце концов, полу-

число, и отнять от него 350, то *число* оставшихся *сотен* и будет задуманным числом. Почему это так?

Пусть, например, задумано 3. По удвоении его получается 6; если прибавить 5, получится 11; взять пять раз 11 — получится 55; прибавить сюда 10 — получится 65; увеличить в 10 раз — получится 650. Если отнять отсюда 350, останется 300, т. е. *три* сотни. Итак, задуманное число есть 3.

107. Волшебная таблица

Вот таблица, в которой в пяти столбцах написаны известным образом все числа от 1 до 31. Таблица эта отличается следующим «волшебным свойством».

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Задумайте какое угодно число (но, конечно, не больше 31) и укажите только, в каких столбцах этой таблицы находится задуманное вами число, а я тотчас же «угадаю» это число.

Если, например, вы задумаете число 27, то скажите только, что задуманное вами число находится в 1-м, 2-м, 4-м и 5-м столбцах;

а я уже сам вам скажу, что вы задумали именно число 27. (Можно это сказать, даже не глядя на таблицу.)

Вместо такой таблицы можно смастерить *Волшебный веер*. Сделайте сами или купите подходящий веер и на пяти пластинках его выпишите изображенную выше таблицу. Можете, обвевая себя веером, предлагать вашему собеседнику задумать число и указать вам только пластинки, на которых оно написано. Вы тотчас угадаете задуманное число.

Но в чем секрет?

108. Четное число

Задумайте четное число. Утройте его. Возьмите половину полученного числа и опять утройте ее. Если вы скажете, чему равно частное от деления найденного числа на 9, то я назову задуманное число.

Пусть задумано 6. После утроения получается 18. Половина этого числа равна 9. Утроив, получаем 27. Если теперь разделить на 9, то получится 3, т. е. половина задуманного числа.

Этот фокус можно показывать и в более общем виде, предлагая задумать произвольное целое число. При этом вводятся некоторые изменения.

Если утроенное задуманное число на два не делится, то к утроенному числу нужно сначала добавить 1, а потом разделить на два и действовать, как и ранее. Нужно также иметь в виду, что в этом случае при угадывании числа после удвоения нужно обязательно прибавить 1.

Пусть, например, задумано число 5. Утраивая, получаем 15. Чтобы разделить пополам нацело, нужно прибавить 1, получится 16. Половина от 16 равна 8, утроив, получаем 24. Частное от деления с остатком этого числа на 9 равно 2. Умножая это число на 2 и прибавляя 1, получаем задуманное число 5.

Если вы показываете этот фокус в первый раз и утроенное число на 2 не делится, то ваш товарищ обязательно спросит: «А что делать, если число на 2 не делится?» Этот вопрос укажет вам, что при угадывании нужно удвоенное частное увеличить на единицу. Вы можете и сами спросить, разделилось ли число на 2. Нужно только, чтобы этот вопрос прозвучал как попытка помочь вашему товарищу в выполнении арифметических действий и он не

заподозрил бы, что его ответ на этот вопрос поможет вам в угадывании задуманного числа.

В чем секрет фокуса?

109. Видоизменение предыдущей задачи

Утроить задуманное число, затем взять половину произведения; если же произведение получится нечетное, то прибавить к нему единицу и потом разделить пополам. Утроить снова эту половину, затем взять половину полученного числа, прибавляя, как выше, 1, если от умножения на 3 получится нечетное число. Затем надо спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 9, и частное умножить на 4. При этом нужно иметь в виду, что если при делении на два в первый раз приходилось прибавлять 1, то угадывающему нужно тоже держать в уме 1, а если при делении и во второй раз приходилось прибавлять 1, то нужно запомнить еще 2. Следовательно, если оба раза деление на 2 не могло быть выполнено нацело без прибавления 1, то, умножив частное на 4, нужно к полученному числу прибавить еще 3; если же деление пополам нацело не выполняется только в первый раз, то прибавляется 1, а если только во второй, то прибавляется 2. В результате всегда получится задуманное число.

Почему?

Пусть, например, задумано 7; утраивая, получим 21; чтобы разделить пополам нацело, надо прибавить 1; прибавляя ее и деля 22 пополам, получим 11; по утроении получим 33; чтобы взять половину, опять нужно прибавить 1, после чего получим 34, половина этого числа есть 17. Здесь 9 содержится только 1 раз. Следовательно, нужно взять число 4 и к нему прибавить еще 3, так как деление и в первом и во втором случае совершалось лишь после прибавления 1. Получается: $4 + 3 = 7$, т. е. задуманное число.

110. Еще одно видоизменение задачи 108

Задумайте число; прибавьте к нему половину того же числа; к полученной сумме прибавьте половину этой же суммы. Затем нужно спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 9, и умножить его на 4, как выше. Но и здесь, как всегда, нужно помнить, что если в первом случае число не делится нацело на 2, то нужно прибавить к нему 1 и затем поделить на две равные

части; точно так же нужно поступать и во втором случае. А затем, если деление нацело не выполнялось только в первом случае, то угадывающий должен держать в уме 1, если только во втором, то 2, а если и в первом и во втором, то 3 и эти числа соответственно потом прибавлять для получения правильного ответа.

Например, задумано число 10; прибавляя к нему его половину, получим 15 — число нечетное; поэтому, прибавляя к нему 1 и беря половину, получим 8; прибавляя 8 к 15, получим 23; в этом числе 9 содержится 2 раза. Два раза по четыре равно 8, но к 8 надо прибавить еще 2, потому что во втором случае, чтобы разделить на 2 нацело, приходилось прибавлять 1. Итак, $8 + 2 = 10$, т. е. получаем задуманное число.

Если число нечетное, то разделим его на две такие части, чтобы одна была на единицу больше другой, и условимся для краткости называть первое слагаемое *большой половиной*, а второе — *меньшей*. Тогда рассматриваемую нами задачу можно представить еще в одной довольно интересной форме.

Задумайте число. Прибавьте к нему его половину или, если оно нечетное, то его «большую половину». К этой сумме прибавьте ее половину или, если она нечетна, то ее «большую половину». Сколько раз в полученном числе содержится 9?

Умножив затем частное на 4, задумавшему число надо предложить такие вопросы: можно ли от остатка от деления на 9 отнять еще 8? Если можно, то, значит, чтобы получить задуманное число, нужно к числу, полученному от умножения частного на 4, прибавить 3.

Если же нельзя отнять 8, то надо спросить, нельзя ли отнять 5. Если можно, то нужно прибавить 2. Если же 5 нельзя вычесть, то спросить, нельзя ли вычесть 3, и если можно, то прибавляется 1.

Легко убедиться, что задача, предложенная в этой последней форме, сводится, в сущности, к предыдущим, потому что утроить число и взять потом половину полученного произведения — это все равно что прибавить к числу его половину и т. д.

Понявший и всесторонне усвоивший доказательства приведенных выше задач в их различных видоизменениях может сам легко создать множество правил, подобных предыдущим, для угадывания задуманного числа.

Можно, например, заставить утроить задуманное число, затем взять половину полученного произведения, эту половину предложить умножить уже на 5 и взять половину произведения. Вслед за тем спросить, чему равно частное от деления последнего числа на 15, и умножить его на 4. При этом, как и раньше, нужно к произведению прибавлять 1, 2 или 3, смотря по тому, когда деление на 2 не совершается нацело: в первом случае, во втором или в обоих вместе.

Внимательный читатель легко все это докажет сам.

Можно также, например, предложить умножить задуманное число на 5, взять половину полученного произведения, эту половину опять умножить на 5, полученное снова разделить на 2, а затем спросить, чему равно частное от деления найденного числа на 25, и умножить его на 4. При этом нужно иметь в виду опять-таки случаи, когда деление на 2 совершается нацело, а когда нет, и прибавить 1, 2 или 3, где следует, или же не прибавлять ничего, если деление на 2 в обоих случаях было нацело.

Словом, предложенные задачи можно разнообразить всячески.

111. Угадать задуманное число иным способом

Сначала нужно поступать, как в предыдущих задачах, т. е. предложить утроить задуманное число, взять половину (или «большую половину») полученного произведения, утроить эту половину и взять снова половину (или «большую половину») полученного числа. Но затем вместо вопроса, чему равно частное от деления последнего числа на 9, можно попросить назвать все цифры, которыми пишется это последнее число, *кроме одной*, лишь бы эта неизвестная отгадывающему цифра *не была нуль*.

Точно так же необходимо, чтобы загадывающий сказал и *порядок цифр* — как тех, которые уже им названы, так и той, которая угадывающему еще неизвестна.

После этого, чтобы узнать задуманное число, надо сложить все цифры, которые названы, и отбросить от этой суммы 9 столько раз, сколько возможно. Остаток, который после этого получится, надо вычесть из 9, и тогда получится неизвестная цифра; или же, если остаток будет нуль, то неизвестная цифра и есть 9. Поступают именно так в том случае, если оба раза деление пополам совершалось нацело. Если же, чтобы разделить число пополам, приходи-

лось прибавлять 1 в первый раз, то нужно сначала к сумме известных цифр прибавить еще 6 и поступать затем, как указано.

Если для деления пополам приходилось прибавить 1 только второй раз, то к той же сумме нужно добавить 4.

Если в обоих случаях деление не совершалось сразу нацело и приходилось прибавлять по 1, то к сказанной сумме нужно прибавить 1.

Найдя таким образом неизвестную цифру последней половины, мы узнаем и саму половину. Узнав же, сколько раз в ней заключается по 9, взяв соответственное число раз по 4 и прибавляя, когда нужно, 1, 2 или 3, получим искомое задуманное число.

В чем секрет?

Например, задумано 24. Утроив и разделив два раза, находим, что последняя половина есть 54. Пусть задумавший число назовет угадывающему первую цифру 5. Тогда вычитанием 5 из 9 получается вторая цифра 4. Итак, последняя половина есть 54. В ней 9 содержится 6 раз. Следовательно, задуманное число есть $4 \times 6 = 24$.

Положим еще, что задумано 25. Утраивая и беря половину произведения, утраивая эту половину и беря снова половину, находим 57. Но нужно помнить, что в первом случае, чтобы получить половину, приходилось прибавлять 1; поэтому, если задумавший число объявит, например, первую цифру 5, то надо к 5 прибавить 6, получится 11; отбрасывая 9, получим 2; вычитая 2 из 9, получим вторую цифру 7. Итак, вторая половина 57; в ней 9 содержится 6 раз. Отсюда задуманное число равно $4 \times 6 + 1 = 25$.

Пусть задумавший число скажет, что последняя полученная им половина числа состоит из трех цифр, что две последние цифры суть 13 и что для деления пополам нацело приходилось во второй раз прибавлять 1. В таком случае к сумме $1 + 3 = 4$ нужно прибавить еще 4, получается 8. Вычитая 8 из 9, получим 1. Следовательно, последняя половина есть 113; в ней 9 содержится 12 раз. Поэтому задуманное число есть $4 \times 12 + 2 = 50$.

Точно так же, если бы задумавший число сказал, что после утроений и делений на 2 он получил трехзначное число, в котором первая цифра 1, а последняя 7, и что в обоих случаях при делении на 2 приходилось прибавлять по 1, то на основании предыдущего поступаем так: $1 + 7 + 1 = 9$. Отбрасывая 9, получим

в остатке нуль, т. е. неизвестная цифра последней половины есть 9, и сама это половина есть 197, где 9 содержится 21 раз. Отсюда по предыдущему заключаем, что задуманное число есть $4 \times 21 + 3 = 87$.

112. Угадать задуманное число еще одним способом

Изложим теперь способ, который с виду кажется замысловатее других, хотя доказывается очень легко.

Пусть кто-нибудь задумает какое-либо число. Затем предложите ему умножить это число на какое угодно заданное вами другое число, полученное произведение разделить на какое угодно, заданное вами число, затем результат опять умножить на какое вам угодно число, это произведение опять разделить на какое угодно заданное вами число и т. д. Если угодно, то можно предоставить тому, кто задумал число, самому умножить и делить задуманное число на какие ему угодно числа, лишь бы он сообщал каждый раз, на какое число он множит и на какое делит. Но, чтобы угадать задуманное число, сам угадывающий пусть в то же время возьмет какое-либо число и проделывает над ним все те же самые умножения и деления, что и задумавший число. Остановившись затем на каком-либо делении, попросите задумавшего число, чтобы он разделил на задуманное им число то последнее число, которое он получил. Точно так же и вы (угадывающий) разделите последнее вами полученное число на взятое вами первоначально. *Тогда у вас получится то же число, что и у задумавшего число.* После этого пусть задумавший число прибавит к полученному им в уме частному задуманное число и скажет вам результат. Вычитая из этого результата известное уже вам число, получаете задуманное число.

Почему?

Пусть, например, кто-нибудь задумает число 5. Предложите ему умножить его на 4; результат (20) разделить на 2 (получится 10), полученное число умножить на 6 (получится 60), это последнее произведение разделить на 4 (получится 15). Но в то же время вы сами должны выбрать какое-либо число и делать над ним все те же действия. Пусть, например, вы возьмете 4 (лучше, вообще, брать для удобства 1). Умножая на 4, вы получаете 16; деля на 2, вы получаете 8; умножая на 6, вы получаете 48; деля это число

на 4, вы получаете 12. Вслед за тем вы говорите задумавшему число, чтобы он последнее полученное им число (т. е. 15) разделил на задуманное (т. е. на 5). У него получается 3.

Если вы в то же время свое последнее число 12 разделите на взятое вами сначала, т. е. на 4, то получите также 3. Сделав вид, что вам неизвестно полученное вашим партнером частное, вы говорите ему, чтобы он прибавил к полученному им числу задуманное число и сказал вам результат; он, конечно, скажет вам в этом примере 8. Отнимая от 8 полученное вами уже частное 3, найдете задуманное вашим партнером число 5.

113. Угадать несколько задуманных чисел

I. Пусть кто-нибудь задумает *нечетное* число каких-либо чисел, т. е. 3, или 5, или 7, или 9 и т. д. чисел, и пусть он скажет вам сумму первого и второго чисел, затем суммы второго и третьего, третьего и четвертого и т. д., наконец, сумму последнего из задуманных им чисел и первого.

Возьмите эти суммы *в том же порядке*, как они сказаны вам, и сложите вместе все те, которые стоят на нечетных местах (т. е. 1-ю с 3-й, с 5-й и т. д.), а затем сложите все те, которые стоят на четных местах (т. е. 2-ю с 4-й, с 6-й и т. д.), и вычтите из первого результата второй. Остаток и даст *удвоенное первое задуманное число*. Беря половину этого остатка, получаем *само число*. Зная его, нетрудно найти остальные числа, так как суммы первого и второго, второго и третьего и т. д. известны.

Почему так получается?

II. Если же кто-нибудь задумает четное число чисел, то, как и выше, пусть он скажет суммы задуманных чисел по два (первого со вторым, второго с третьим и т. д.), но в конце пусть объявит сумму не последнего с первым задуманным числом, но последнего со вторым. После этого опять нужно сложить все суммы, стоящие на нечетных местах, кроме первой, затем все суммы, стоящие на четных местах, и из второго результата вычесть первый. Остаток и даст удвоенное второе задуманное число.

Почему?

114. Угадать задуманное число, ничего не спрашивая у задумывающего

Предложите кому-либо задумать число, затем пусть он умножит задуманное число на произвольно выбранное вами число, к этому числу пусть он прибавит любое данное вами число и полученную сумму разделит на данное вами же произвольное число. В то же время данный вами множитель разделите в уме на данный делитель, — сколько единиц и частей единицы заключается в полученном частном, столько раз предложите задумавшему число отнять от полученного им частного задуманное число, и вы тотчас же скажете ему остаток, который он получил. Этот остаток всегда равен частному, полученному от деления того числа, которое вы дали, чтобы прибавить к произведению, на данный вами же делитель.

Почему?

Пусть, например, кто-нибудь задумает 6; предложите ему умножить его на 4, получится 24; предложите прибавить 15; получится 39. Пусть разделит на 3; получится 13. Деля в уме в то же время 4 на 3, вы получаете $4/3$, или $1\frac{1}{3}$. Поэтому предложите задумавшему число отнять от полученного им частного задуманное число да еще одну треть этого числа (т. е. шесть да еще два — всего восемь): $13 - 8 = 5$, остается 5. Тот же результат получится, если вы данное вами число 15 разделите на данный вами же делитель 3.

Предложенная задача решена здесь в довольно общем виде. Употребляется часто такой частный случай ее. Заставляют удваивать задуманное число, затем прибавлять к результату произвольное, но четное число, затем заставляют полученную сумму делить на 2 и из частного вычитать один раз задуманное число. Остаток, конечно, всегда получится равным половине прибавленного раньше четного числа. Очевидно, однако, что интереснее решать задачу в общем виде. Тем более, что при этом можно практиковаться в дробях. Если же почему-либо нежелательно получать дроби, то всегда возможно подобрать такие числа, чтобы дробей не получалось.

115. Кто выбрал четное число?

Даны два числа — одно четное, другое нечетное, и предложено двум лицам взять одному четное число, а другому — нечетное, как кто пожелает. Угадать, кто выбрал четное, а кто нечетное.

Вы предлагаете, например, Петру и Ивану два числа (одно четное и другое нечетное), например 10 и 9. Из них один уже без вашего ведома берет четное, а другой — нечетное число. Чтобы угадать, какое кто взял число, вы тоже возьмите два числа, четное и нечетное, например 2 и 3, предложите, чтобы Петр взятое им число умножил про себя на 2, а Иван свое число — на 3, после чего пусть они сложат полученные ими числа и скажут вам полученную сумму. Или же пусть скажут только, *четное* или *нечетное* число они получили после сложения, так как вам нужно знать только это. Если же хотите задачу сделать более непонятной, то выведите это у них другим путем (предлагая, например, разделить полученную ими сумму на два и сказать, делится или не делится она нацело, и т. д.). Положим, вы узнали, что получилась четная сумма; тогда ясно, что число, умноженное на 3, было четное, т. е. Иван взял четное число 10, а Петр — нечетное 9. Если же после сложений у них получилась нечетная сумма, то ясно, что тот взял нечетное число, кому вы предложили умножить его число на 3.

Дайте обоснование этого способа угадывания.

116. Та же задача с двумя взаимно простыми числами

Предложите двоим заметить любое из данных двух чисел, но таких, чтобы эти числа были между собой *взаимно простые*, как, например, 9 и 7, и, кроме того, чтобы одно из них было составное (как в данном примере 9). Множителями, на которые вы хотите, чтобы умножили замеченные числа, возьмите также два взаимно простых числа, но таких, чтобы одно из них содержало целое число раз в одном из чисел, данных на выбор. Например, если взять 3 и 2, то эти числа и взаимно простые и 3 есть множитель 9. Вслед за тем предложите одному умножить выбранное им число на 2, а другому — на 3, сложить результаты и сказать вам или полученную сумму, или же сказать, делится ли эта сумма нацело на тот данный вами множитель, который, в свою очередь, содержится в одном из предложенных вами на выбор

чисел. (Например, во взятом нами примере узнать, делится ли число на 3.) Узнав это, сразу можно определить, кто какое число заметил. В самом деле, если полученная сумма делится на 3, это значит, что на 3 умножено число, не делящееся на 3, т. е. 7; наоборот, если полученная сумма не делится на 3, то это значит, что на 3 было умножено число, делящееся на 3, т. е. 9. Точно так же поступают и в тех случаях, когда берутся и предлагаются другие числа, лишь бы они удовлетворяли изложенным выше условиям. Дайте объяснение этого способа угадывания.

117. Отгадать несколько задуманных чисел, если каждое из них не превышает десяти

Попросите задумавшего умножить *первое* из задуманных чисел на 2 и к произведению прибавить 5, полученную сумму умножить на 5 и к результату прибавить 10. К полученному числу прибавить *второе* задуманное число и все умножить на 10; к полученному результату прибавить *третье* задуманное число и опять умножить на 10; потом прибавить *четвертое* из задуманных чисел и опять умножить на 10 и т. д. Словом, пусть задумавший несколько чисел, каждое из которых не превышает десяти, постоянно умножает на 10 и прибавляет одно из задуманных чисел, пока не прибавит последнего. Вслед за тем пусть задумавший числа объявит последнюю полученную им сумму; и если задумано только два числа, то, вычтя из этой суммы 35, найдем, что число десятков остатка дает первое задуманное число, а число простых единиц дает второе задуманное число. Если же задумано три числа, то из сказанной вам суммы вычтите 350, и тогда число сотен даст первое задуманное число, число десятков — второе, число простых единиц — третье. Если задумано четыре числа, то из сказанной вам суммы вычтите 3500, и тогда число тысяч остатка даст первое задуманное число, число сотен — второе, число десятков — третье; число простых единиц — четвертое. Ясно, что в случае пяти задуманных чисел нужно из сказанного вам результата вычитать 35 000 и т. д.

Пусть, например, задуманы 3, 5, 8, 2. Удваивая первое из них, получаем 6; прибавляя 5, находим 11; умножая это число на 5, имеем 55; прибавляя 10, получаем 65; прибавляя второе задуманное число, получаем 70; умноженное на 10, оно дает 700; прибавляя сюда третье задуманное число, получаем 708; умножая на

10, получаем 7080; прибавляя сюда четвертое число, получаем 7082. Если теперь из этого последнего числа вычесть 3500, то получится остаток 3582, который и выражает по порядку цифр задуманные числа: 3, 5, 8, 2.

Дайте объяснение предложенного способа угадывания.

Эту задачу можно, очевидно, видоизменять и прилагать ко многим частным случаям.

Так, например, при игре в кости* с помощью этой задачи можно угадать, не глядя, число выброшенных каждой костью очков. И это тем более легко, что число очков каждой кости не превышает шести. Способ угадывания и правила остаются совершенно те же.

* Кость — это кубик, на каждой из шести граней которого написано по одной цифре от 1 до 6.

ИГРЫ С ЧИСЛАМИ И ПРЕДМЕТАМИ

118. Записать единицу тремя пятерками

Пользуясь тремя пятерками и какими угодно знаками математических действий, написать выражение, равное единице.

Если вы никогда не пробовали решать подобные задачи, то вам немало придется подумать, прежде чем вы нападете на одно из правильных решений. Вот одно решение предлагаемой задачи:

$1 = \left(\frac{5}{5}\right)^5$. Попробуйте найти другие решения.

119. Записать двойку тремя пятерками

Как записать двойку тремя пятерками?

120. Записать четыре тремя пятерками

Как записать четыре тремя пятерками?

121. Записать пять тремя пятерками

Как записать пять тремя пятерками?

122. Записать нуль тремя пятерками

Как записать нуль тремя пятерками?

123. Записать 31 пятью тройками

Как записать 31 пятью тройками?

124. Автобусный билет

В автобусе вам попался билет с номером 524127. Попробуйте, не меняя порядка цифр, расставить между ними знаки математических действий так, чтобы в итоге получилось 100.

Эта занятная игра может скрасить вам время длительной поездки, если вы попытаетесь получить 100 подобным же образом из номера попавшегося вам билета. Если вы едете не один, то можно устроить маленькое соревнование: кто быстрее получит 100 из цифр своего билета.

125. Кто первый скажет «сто»?

Двое поочередно говорят произвольные числа, но не превышающие 10. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет *ста*.

Если первый скажет, например, «7», а второй «10», получится «17»; затем первый говорит, например, «5», получится «22»; второй говорит «8», получится «30» и т. д. Победителем будет тот, кто первый получит «100».

Как сделать так, чтобы наверняка первым сказать «сто»?

126. Обобщение

Предыдущую задачу можно предложить и в таком общем виде.

Двое говорят поочередно произвольные числа, не превышающие, однако, какого-нибудь условленного предела. Эти числа складываются одно за другим, и выигрывает тот, кто первый достигнет какого-нибудь *заранее назначенного числа*.

Сделать так, чтобы всегда первым прийти к этому назначенному числу.

127. Собрать в группы по 2

Десять спичек положены в один ряд (рис. 57). Требуется распределить их попарно, всего в 5 пар, перекладывая по одной спичке через две (например, первую переложить к четвертой).

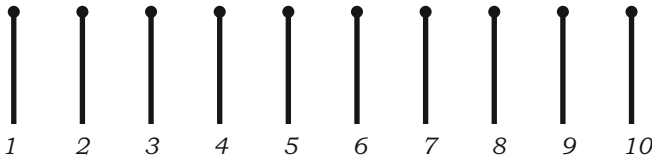


Рис. 57

128. Собрать в группы по 3

Пятнадцать спичек расположены в ряд. Требуется собрать их в 5 кучек по 3 спички, перекладывая их по одной и каждый раз перескакивая при этом через 3 спички.

129. Детская пирамида

Возьмем 8 деревянных или из толстого картона кружков уменьшающегося диаметра и 3 вертикально укрепленные на подставках палочки (стержня). Кружки снабжены в центре отверстиями, и их накладывают, начиная с наибольшего, на одну из палочек *A*. Это и есть детская пирамида в 8 этажей (рис. 58, вверху).

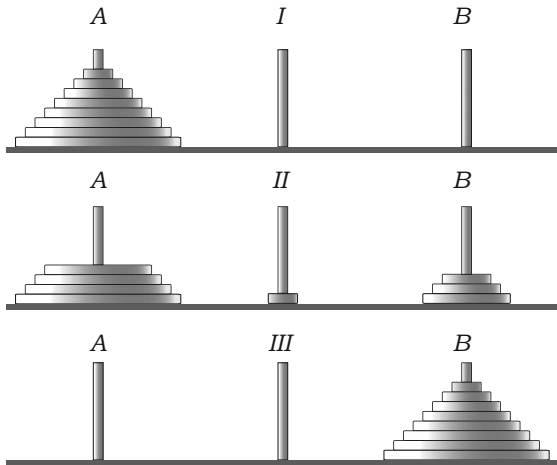


Рис. 58

Требуется эту пирамиду с палочки *A* перенести на палочку *B*, пользуясь третьей палочкой (*I*, *II* и *III* на нашем рисунке) как

вспомогательной и соблюдая следующие условия: 1) не переносить за один раз более одного кружка, 2) класть снятый кружок или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружок большего диаметра. Надевать на какую-либо из палочек больший кружок поверх меньшего нельзя.

Л е г е н д а. Если выше вместо 8 кружков возьмем 64 кружка, то получим задачу, связанную с древнеиндийской легендой. Легенда эта гласит, будто в городе Бенаресе, под куполом главного храма, в том месте, где находится середина Земли, бог Брами поставил вертикально на бронзовой площадке три алмазные палочки, каждая длиною в локоть и толщиной в корпус пчелы. При сотворении мира на одну из этих палочек были надеты 64 кружка из чистого золота с отверстиями посередине — так, что они образовали род усеченного конуса, так как диаметры их шли в возрастающем порядке, начиная сверху. Жрецы, сменяемые один другим, днем и ночью без усталости трудятся над перенесением этой колонны кружков с первой палочки на третью, пользуясь второй как вспомогательной, причем они обязаны соблюдать уже указанные условия, т. е. 1) не переносить за один раз более одного кружка и 2) класть снятый кружок или на свободную в этот момент палочку, или накладывать его на кружок только большего диаметра. Когда, соблюдая все эти условия, жрецы перенесут все 64 кружка с первой палочки на третью, наступит конец мира...

130. Интересная игра

Попробуйте со своим товарищем сыграть в следующую игру. Расположите на столе три кучки спичек. Например, в 12, 10 и 7 спичек. Игра заключается в том, чтобы поочередно брать из кучек некоторое, какое вам захочется, количество спичек, но каждый раз только из одной кучки. Можно взять и сразу целую кучку. Выигрывает тот, кто последним возьмет спички. Давайте для примера разыграем партию. Одного игрока обозначим А, другого Б.

Исходное положение	12,	10,	7
После хода А	12,	10,	6
После хода Б	12,	7,	6
После хода А	1,	7,	6

После хода Б	1,	5,	6
После хода А	1,	5,	4
После хода Б	1,	3,	4
После хода А	1,	3,	2
После хода Б	1,	2,	2
После хода А	0,	2,	2
После хода Б	0,	1,	2
После хода А	0,	1,	1
После хода Б	0,	0,	1

Последним ходом игрок А выигрывает. Вопрос состоит в следующем: может ли А играть так, чтобы всегда выигрывать?

Историческая справка.

Предполагают, что игра «домино» перешла к нам от индусов или древних греков. Действительно, простота этой игры наводит на мысль, что она придумана еще в очень отдаленные времена, на первых ступенях цивилизации. Что касается названия самой игры, то относительно него существуют разногласия. Филологи ищут его корень в древних языках, но вероятнее всего такое предположение. Игра в домино разрешалась в католических монастырях и религиозных общинах. Но всякое дело там начиналось, как известно, с восхваления «имени божия». И когда игрок выставлял первую кость, он произносил: «*benedicamus Domino*» (бенедикамус Домино), т. е. «восхвалим господа». Или произносилось «*Domino gratias*» (Домино гратиас), т. е. «благодарение господу». Отсюда и получилось в сокращении просто слово «домино».

131. Удивительный отгадчик

Десять косточек домино вниз «лицом» положены в последовательно возрастающем справа налево порядке, т. е. одно, два, три и т. д. до десяти очков. «Отгадчик» объявляет остальным, что он уйдет в другую комнату или отвернется, а они без него могут переместить справа налево сколько угодно косточек, причем единственным условием ставится то, чтобы не изменялось относительное расположение как перемещенных, так и остальных косточек. По возвращении отгадчик берется узнать не только число перемещенных косточек, но и открыть ту косточку, которая укажет (числом очков), сколько перемещено косточек.

И действительно, оказывается, что требуемую косточку всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самого простого, не выходящего из предела первого десятка, арифметического расчета.

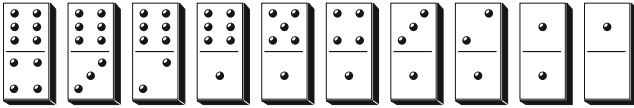


Рис. 59

Разъясним подробно задачу. Для этого перевернем косточки домино «лицом» вверх. Справа налево они первоначально лежат в таком порядке, как указано на рис. 59.

Воображаемый «маг и чародей» оставляет комнату, а тот, кто желает убедиться в «чудесных» его способностях, перемещает несколько косточек справа налево, не изменяя их относительного расположения, а затем двигает все косточки в этом новом порядке так, чтобы весь ряд косточек занимал прежнее место. Пусть, например, перемещено вначале 4 косточки. Тогда новый порядок их будет представлен рис. 60.

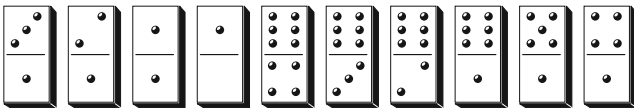


Рис. 60

Очевидно, что первая косточка слева четверка и показывает число перемещенных косточек. Поэтому явившийся в комнату «угадчик» открывает первую косточку *слева*, кладет ее на стол и говорит: «Перемещено четыре косточки домино». Здесь могут быть для большего интереса пушены в ход маленькие хитрости. Хотя дело в том, чтобы посмотреть эту первую косточку слева, но «угадчик» может сделать вид и внушить собеседникам, что он знает число перемещенных косточек раньше, чем открывает косточку, и что открывание четверки есть только добавочное доказательство его всезнания.

Дальше дело пойдет еще удивительнее и занимательнее. Косточки остаются в том же порядке, и угадывающий уходит, зная,

что последняя косточка слева есть четверка. Сколько бы косточек в его отсутствие ни переместили (опять справа налево и не изменяя порядка), если он придет и откроет пятую косточку ($4 + 1 = 5$), считая слева направо, то число очков этой косточки покажет ему всегда число перемещенных косточек. Так, пусть перемещено во второй его выход справа налево три косточки. Тогда получится такой порядок косточек, какой показан на рис. 61, и пятая косточка, считая слева, действительно показывает три очка. Открыв эту тройку и положив ее опять на место, нетрудно уже, не глядя, сообразить, что последняя косточка слева теперь будет семерка. Запомнив это, угадывающий опять уходит в другую комнату, предлагая переместить сколько угодно косточек справа налево, заранее зная, что по приходе он откроет восьмую косточку и число очков этой косточки ему покажет, сколько косточек было перемещено в его отсутствие.



Рис. 61

Вообще, если вы знаете число очков последней слева косточки, а это, видим, нетрудно, то к этому числу надо прибавить единицу, и вы получите то место, считая по порядку слева, на котором лежит косточка, указывающая, сколько косточек перемещено.

Но легко видеть, что для каждой косточки сумма числа очков на ней и ее номера как раз равна номеру косточки, которую нужно открыть в следующий раз (если сумма больше 10, то из нее нужно вычесть 10). Это упрощает все рассуждения. Теперь достаточно лишь к числу очков открытой косточки прибавить ее номер, чтобы получить номер (быть может после вычитания 10) косточки, которую нужно открыть в следующий раз. В рассмотренном примере открывалась пятая косточка, на которой были три очка. Значит после прихода нужно взять восьмую ($5 + 3 = 8$) косточку.

Задача эта, как видим, весьма проста, но и весьма эффектна. Разобраться в решении ее не составляет особого труда, и каждый желающий может это сделать.

132. Верная отгадка

Возьмите двадцать пять косточек домино, переверните их «лицом» вниз и положите рядом одну за другой так, чтобы они соприкасались более, длинными сторонами. Вслед за тем объявите, что вы отвернетесь, или даже уйдете в другую комнату, а кто-нибудь пусть с правого конца переместит на левый какое-нибудь число косточек домино (не более, однако, двенадцати). Возвратившись в комнату, вы сразу открываете косточку, число очков которой непременно укажет число перемещенных в ваше отсутствие косточек домино.

Как это сделать?

133. Сумма всех очков домино

Сосчитать сумму очков, содержащихся на всех косточках домино.

134. Небольшая забава

Переверните «лицом» вниз все косточки домино без дублей. Одну же из косточек тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта косточка не была дублем. Затем предложите кому-нибудь взять любую из лежащих на столе косточек, посмотреть ее и положить на стол вверх лицевой стороной, а вслед за тем пусть он же раскроет и все остальные косточки домино и расположит их вместе с первой открытой косточкой по правилам игры, но так, чтобы не замкнуть игры. Получится некоторое расположение косточек, и вы *сможете заранее предсказать числа очков*, которые получатся на концах этого расположения. Эти числа будут как раз те, которые находятся на квадратах раньше спрятанной вами косточки домино.

В самом деле, если расположить все косточки домино одну за другой в порядке, требуемом правилами игры, т. е. чтобы последовательные косточки соприкасались квадратами с одинаковым числом очков, то игра всегда окончится таким же числом очков, каким она началась. Если, скажем, расположение косточек начинается квадратиком с пятью очками, то оно и окончится пятью при условии, конечно, не закрывать игру, пока не будут положены все косточки. Итак, все 21 косточки без дублей можно

расположить, соблюдая правила игры, по кругу, и если из этого круга отнять, например, косточку (3, 5), то ясно, что расположение остальных 20 косточек начнется с одной стороны *пятью*, а закончится *тремя*.

Этой небольшой забавой вы можете очень заинтересовать тех, кто не знает, в чем дело, особенно если сделать вид, что вы будто бы производите в уме самые сложные вычисления. Следует также при повторении забавы по возможности ее разнообразить и видоизменять.

135. Наибольшее число

Допустим, что играют в домино четверо. Каждый играет «за себя», т. е. на каждого игрока ведется отдельный счет выигранных очков. Перед началом игры каждый игрок имеет по семи косточек. При этом могут получаться такие интересные расположения косточек, при которых первый игрок *обязательно выигрывает*, в то время как второй и третий игроки не смогут положить ни одной косточки. Пусть, например, у первого игрока будут четыре первых нуля и три последних единицы, т. е. такие косточки:

$$(0, 0) (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$

а у четвертого игрока пусть будут остальные единицы и нули, т. е. косточки

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6)$$

и еще какая-либо косточка. Остальные косточки домино поделены между вторым и третьим игроками. В таком случае первый игрок выигрывает после того, как будут положены все 13 указанных выше косточек домино, а второй и третий игроки не смогут поставить ни одной из своих.

В самом деле, первый игрок начинает игру и ставит (0, 0). Вторым и третьим досадают, ибо у них нет подходящей косточки. Тогда четвертый игрок может положить любую из трех косточек (0, 4), (0, 5) или (0, 6). Но первый приложит в ответ (4, 1), (5, 1) или (6, 1). Вторым и третьим опять не смогут ничего положить, а четвертый поставит (1, 1), или (1, 2), или (1, 3), на что первый может ответить (1, 0), (2, 0), (3, 0) и т. д. Таким образом, он положит все свои косточки, в то время как у второго и третьего игроков останутся все их косточки, а у четвертого — одна. Сколько же выигрывает первый? Сумма очков в положенных 13 косточках

равна, как легко видеть, 48, а число очков всей игры есть 168. Значит, первый игрок выигрывает $168 - 48 = 120$ очков в одну игру. *Это наибольшее возможное число.*

Можно составить и другие партии, подобные предыдущей. Для этого стоит только нули и единицы заменить соответственно косточками с иным количеством очков: 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобных партии, следовательно, равно числу всех простых сочетаний из семи элементов по 2, т. е. равно 21. Ясно, что вероятность получить такую партию *случайно* весьма мала. Кроме того, все остальные партии, за исключением приведенной выше, дают меньше, чем 120, число выигранных очков.

136. Квадрат из 8 косточек

Можно ли из 8 косточек домино сложить квадрат такой, что любая проведенная через него прямая пересекает хотя бы одну косточку? Квадрат, изображенный на рис. 62, не годится, так как прямая AB не пересекает ни одной косточки.

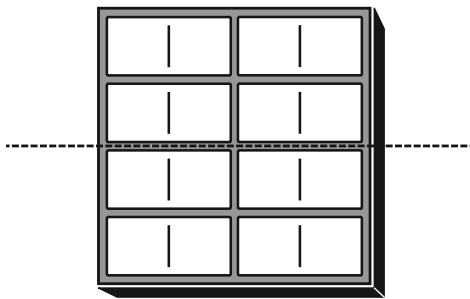


Рис. 62

137. Квадрат из 18 косточек

Можно ли из 18 косточек домино сложить квадрат, удовлетворяющий условию предыдущей задачи?

138. Прямоугольник из 15 косточек

Можно ли из 15 косточек домино сложить прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи 136?

139. Переставить шашки

Четыре белых шашки и четыре черных расположены так, как показано на рис. 63.

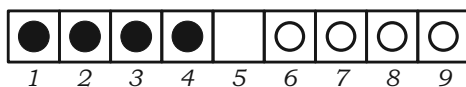


Рис. 63

Требуется переставить белые шашки на клетки с номерами 1, 2, 3, 4, а черные — на клетки с номерами 6, 7, 8, 9 с соблюдением условий:

- 1) каждая шашка может перескочить на ближайшую клетку или через одну клетку, но не дальше;
- 2) никакая шашка не должна возвращаться на клетку, где она уже побывала;
- 3) в каждой клетке не должно быть более одной шашки;
- 4) начинать с белой шашки.

Можно предлагать эту задачу, взяв любое число белых шашек и такое же количество черных. Уже для четырех шашек (2 белых и 2 черных) она представляет интерес для дошкольников.

140. Четыре пары

Взять 4 белых и 4 черных шашки и положить в ряд в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. Можно пользоваться свободным местом только для двух шашек, и можно на это сво-

бодное место перемещать только две рядом лежащие шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Требуется в *четыре* перемещения шашек попарно переместить их так, чтобы оказались подряд четыре черных и затем четыре белых.

141. Пять пар

Кладут в ряд пять белых и пять черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. Требуется, пользуясь двумя свободными местами и перемещая на них по две соседние шашки без изменения их взаимного положения, в *пять* перемещений расположить их так, чтобы подряд были расположены сначала черные, а затем белые шашки.

142. Шесть пар

Положены в ряд в переменном порядке шесть белых и шесть черных шашек: белая, черная, белая, черная и т. д. (рис. 64). Пользуясь двумя свободными местами, требуется, передвигая каждый раз только по две соседние шашки без изменения их взаимного положения, в *шесть* перемещений расположить сначала все черные, а затем все белые шашки.



Рис. 64

143. Семь пар

Кладут в ряд 7 белых и 7 черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. (Рис. 65).



Рис. 65

Пользуясь свободным местом для двух шашек, требуется, передвигая каждый раз только по две соседних шашки без изменения их взаимного положения, в *семь* перемещений расположить сначала все черные, а затем все белые шашки.

144. Пять линий, 10 шашек

Начертите на бумаге пять прямых линий и разложите на них 10 шашек так, чтобы на каждой линии лежало по 4 шашки.

145. Интересная расстановка

Расставить в круг или в ряд 12 черных и 12 белых шашек так, чтобы при отсчитывании, начиная с первой шашки, выбрасывать из круга или ряда каждую седьмую шашку и чтобы выброшенными оказались все белые шашки, а черные остались на своих местах.

ШАХМАТЫ

По поводу 20-значного числа, приведенного в решении задачи 129, существует другая легенда, тоже индусского происхождения, которую рассказывает арабский писатель Асафад.

Брамин Сесса, сын Дагера, придумал игру в шахматы, где король, хотя и самая важная фигура, не может ступить шагу без помощи и защиты своих подданных пешек и других фигур. Изобрел он эту игру в забаву своему монарху и повелителю Индии, Шерану. Царь Шеран, восхищенный выдумкой брамина, сказал, что даст ему *все, что только брамин захочет*.

— В таком случае, — сказал Сесса, — прикажи дать мне столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить зерно, на вторую 2, на третью 4, на четвертую 8 и т. д., все удваивая, пока не дойдут до 64-й клетки.

Повелитель Индии не смог этого сделать. Число требуемых зерен выражалось двадцатизначным числом. Чтобы удовлетворить «скромное» желание брамина, нужно было бы восемь раз засеять всю поверхность земного шара и восемь раз собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зерен.

Обещать «все, что хочешь», легко, но трудно исполнить!

146. Четыре коня

На шахматной доске стоят 4 коня (рис. 66). Требуется разделить доску на 4 одинаковые по форме части, на каждой из которых стоял бы в точности один конь.

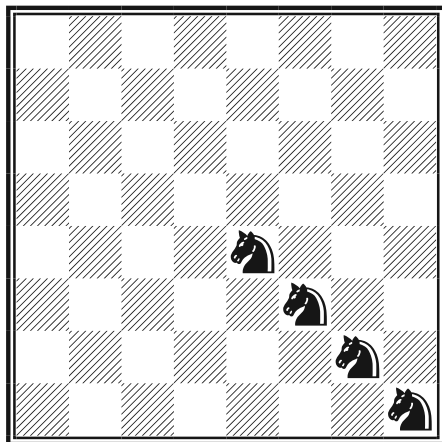


Рис. 66

147. Пешка и конь

Поставим на шахматную доску одну пешку. Может ли конь, помещенный на одну из свободных клеток, обойти все остальные клетки и вернуться на исходную, побывав на каждом поле только один раз?

148. Две пешки и конь

Поставим две пешки в противоположные углы шахматной доски. Может ли конь обойти оставшуюся часть доски так, как это требуется в предыдущей задаче?

149. Конь

Может ли конь обойти 16 центральных полей шахматной доски, побывав на каждом поле по одному разу?

150. Жуки

Представьте себе, что вам удалось поймать 25 жуков и рассадить их по одному на каждой клетке куска шахматной доски размером 5×5 (рис. 67).

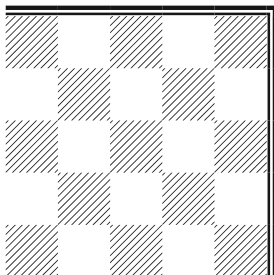


Рис. 67

Давайте предположим теперь, что каждый жук переполз на соседнюю по горизонтали или вертикали клетку этого куска доски. Как вы думаете, останутся ли при этом пустые клетки?

151. Жуки на шахматной доске

Каков будет ответ на вопрос предыдущей задачи для всей шахматной доски размером 8×8 ?

152. Замкнутый путь жука

Может ли жук, помещенный на некоторую клетку шахматной доски, переползая на соседние клетки по горизонтали или вертикали, обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав при этом на каждой клетке только один раз?

153. Пешка и домино

Предположим, что у нас имеется шахматная доска и 32 косточки домино, каждая величиной в две клетки доски. Поставим на какую-нибудь клетку доски пешку. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино так, чтобы ни одна кость не вылезала за пределы доски и кости не налегали друг на друга?

154. Две пешки и домино

Поставим две пешки на противоположные угловые поля доски. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино так, как это требовалось в предыдущей задаче?

155. Опять две пешки и домино

Поставим две пешки на поля разного цвета. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино?

156. Шахматные фигуры и домино

Сколько шахматных фигур нужно поставить на доску для того, чтобы на ней нельзя было разместить ни одной кости домино?

157. О восьми королевах

На шахматной доске, состоящей из 64 клеток, расставить восемь королей так, чтобы ни одна из них не могла бить другую. Другими словами: на восьми клетках шахматной доски поставить восемь королей так, чтобы каждые две из них не были расположены ни на одной линии, параллельной какому-либо краю, и ни на одной из прямых, параллельных какой-нибудь диагонали доски. Этой задачей занимался знаменитый немецкий математик Гаусс. Покажем некоторые решения этой задачи и приведем затем таблицу всех 92 ее решений.

На прилагаемом рис. 68 содержится одно из решений.

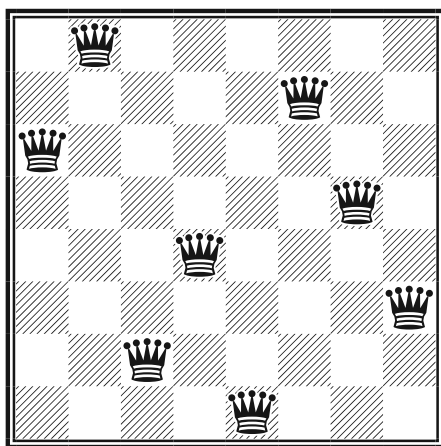


Рис. 68

Обозначим это решение восемью цифрами (6 8 2 4 1 7 5 3), где каждая цифра означает высоту королевы в каждой колонне до-

ски, т. е. 6 показывает, что королева находится в первой колонне на шестой клетке, считая снизу, 8 — что королева находится во второй колонне на восьмой клетке, считая снизу, и т. д. Мы и впредь вертикальные ряды клеток будем называть *колоннами*, а горизонтальные — *линиями*. Линии мы тоже будем обозначать числами от 1 до 8 и считать их снизу вверх. Таким образом, записанное нами выше первое решение с помощью одного ряда чисел было бы правильнее записать так:

(A)	Линии	6	8	2	4	1	7	5	3
	Колонны	1	2	3	4	5	6	7	8

Если мы повернем доску на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки, то из первого решения получим ему *соответственное*, которое представлено у нас на рис. 69.

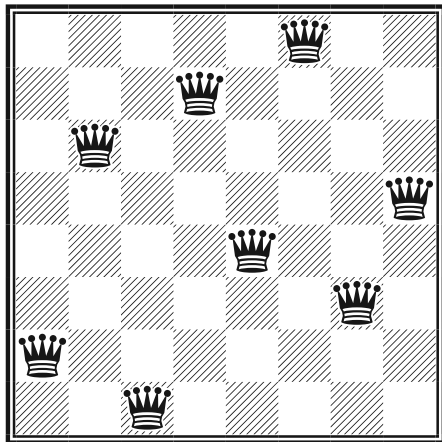


Рис. 69

Чтобы получить это соответственное решение численно из первого, достаточно расположить колонки таблички (A) так, чтобы цифры первой строки шли в убывающем порядке:

(B)	8	7	6	5	4	3	2	1
	2	6	1	7	4	8	3	5

Цифры второй строки полученной таким способом таблички образуют соответственное первому решение (B): (2 6 1 7 4 8 3 5).

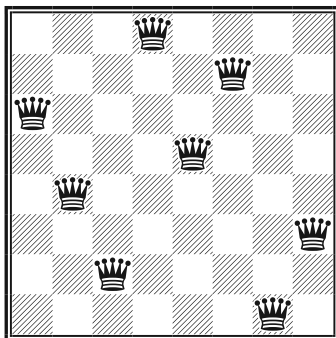


Рис. 70

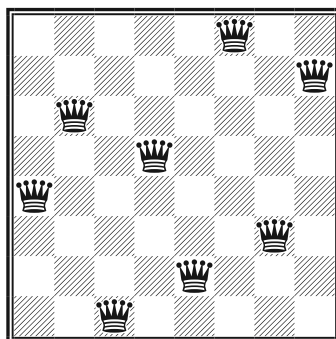


Рис. 71

Следующие два рисунка (рис. 70 и 71) представляют второе и третье решения, соответственные рис. 68. Их можно получить, заставляя шахматную доску вращаться еще на четверть и еще на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки. Можно вывести также, подобно предыдущему, численное обозначение положения *III* (рис. 70) из положения *II* (рис. 69), а положения *IV* (рис. 71) из положения *III*. Но можно и прямо положение *III* получить из *I*, а положение *IV* — из *II*. Для этого поступаем так. Решения рис. 68 и 69 обозначены у нас рядами цифр:

(6 8 2 4 1 7 5 3) и (2 6 1 7 4 8 3 5).

Напишем эти цифры в обратном порядке:

(3 5 7 1 4 2 8 6) и (5 3 8 4 7 1 6 2),

и вычтем каждую из этих цифр из 9, получим

(6 4 2 8 5 7 1 3) и (4 6 1 5 2 8 2 7).

Это и будут численные обозначения решений на рис. 70 и 71.

Таким образом, в общем случае некоторые решения задачи о королевах дают место еще трем *соответственным* решениям.

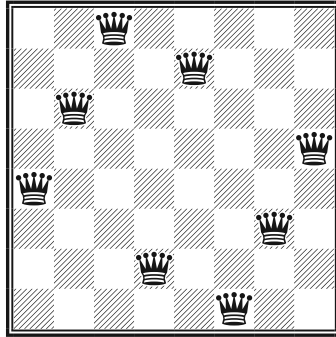


Рис. 72

На рис. 72 дано другое решение задачи. Особенность его заключается в том, что из него получается только одно соответственное решение (рис. 73). В самом деле, если повернуть шахматную доску на полуокружность, то получаем опять то же расположение. Ряд цифр (4 6 8 2 7 1 3 5), изображающий это решение, отличается тем, что, сложенный с рядом, состоящим из тех же цифр, но написанным в обратном порядке, дает (9 9 9 9 9 9 9 9).

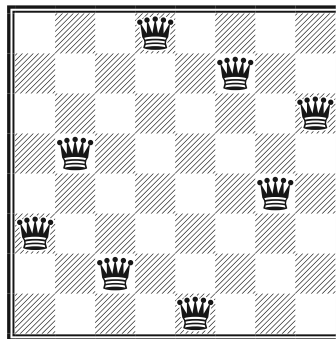
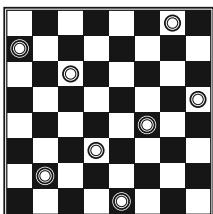
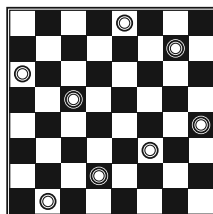


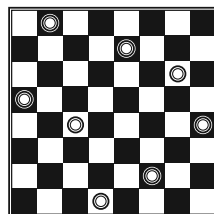
Рис. 73



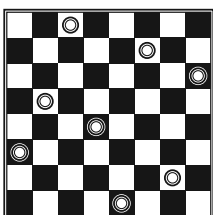
I – 72631485



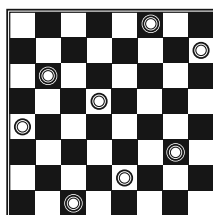
II – 61528374



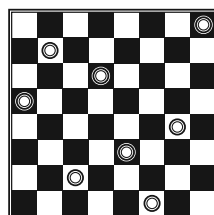
III – 58417263



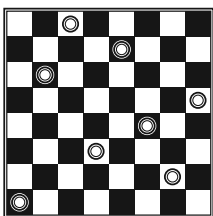
IV – 35841726



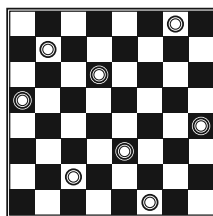
V – 46152837



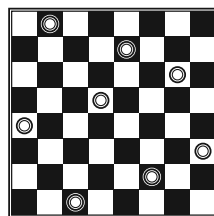
VI – 57263148



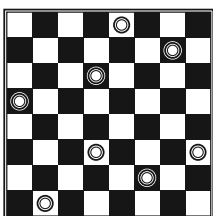
VII – 16837425



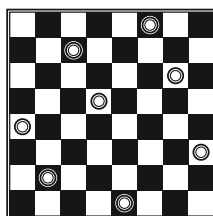
VIII – 57263184



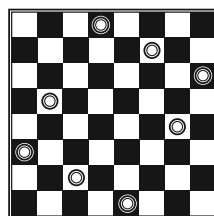
IX – 48157263



X – 51468273



XI – 42751863



XII – 35281746

Рис. 74

Возьмем какое-нибудь решение задачи о восьми королевах и перевернем на рисунке порядок колонн, т. е. 1-ю сделаем 8-й, 2-ю сделаем 7-й и т. д. Или, что сводится к тому же, напомним чис-

ловое обозначение решения в обратном порядке —мы получим *решение, обратное* данному. Легко убедиться, что это решение отличается от всякого из соответственных решений.

Опуская способы отыскания самых простейших решений задачи, дадим эти решения на рис. 74.

Каждое из решений *I—XI* дает, как выше объяснено, 4 соответственных и 4 обратных, т. е. всего 8 решений, последнее же, *XII*, дает только 4 решения. Всего, следовательно, получается 92 решения, которые исчерпывают все решения задачи. Вот таблица всех этих решений:

Таблица всех решений задачи о восьми королевах

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1863	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7136	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6275	67	6271 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8413 6275

Таблицу всех решений можно построить самому, пользуясь следующим весьма простым систематическим приемом. Помещают сначала одну королеву на самую низкую клетку первой колонны слева, затем ставят другую королеву во второй колонне опять на самую низкую по возможности клетку и т. д., всегда стремясь поместить в следующей колонне королеву настолько низко, насколько это позволяют королевы, стоящие слева. Когда наступит такой момент, что в колонне нельзя поместить королеву, поднимают королеву в предыдущей колонне на одну, две, три, ... клетки и продолжают размещать остальных королев, руководствуясь всегда раз принятым правилом: поднимать поставленных королев выше только в том случае, если справа нет совсем места для следующей королевы.

Всякий раз, когда решение найдено, его записывают, и, таким образом, решения будут следовать одно за другим тоже в последовательном числовом порядке. Таблицу, полученную таким путем, можно проверять, образуя соответственные и обратные решения, которые можно вывести из первого и т. д.

158. О ходе шахматного коня

Мы встречались уже в этом разделе с вопросом, может ли конь обойти часть шахматной доски, побывав при этом на каждом поле только один раз.

Вот еще одна старинная задача о ходе шахматного коня:

Требуется обойти конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке конь был только один раз и затем возвратился бы в клетку, из которой вышел.

Задачей этой занимался Эйлер и в письме к Гольдбаху (26 апреля 1757 года) дал одно из решений ее. Вот что, между прочим, пишет он в этом интересном письме:

«...Воспоминание о предложенной когда-то мне задаче послужило для меня недавно поводом к некоторым тонким изысканиям, в которых обыкновенный анализ, как кажется, не имеет никакого применения. Вопрос состоит в следующем. Требуется обойти шахматным конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке он побывал только один раз. С этой целью все места, которые занимал конь при своих последовательных ходах, закрывались марками. Но к этому присоединилось еще требова-

ние, чтобы начало хода делалось с данного места. Это последнее условие казалось мне очень затрудняющим вопрос, так как я скоро нашел некоторые пути, при которых, однако, выбор начала для меня свободен. Я утверждаю, однако, что если полный обход коня будет возвратный, т. е. если конь из последнего места опять может перейти на первое, то устраняется и это затруднение. После некоторых изысканий по этому поводу я нашел, наконец, ясный способ находить сколько угодно подобных решений (число их, однако, не бесконечно), не делая проб. Подобное решение представлено на рисунке (рис. 75).

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Рис. 75

Конь ходит в порядке, указанном числами. Так как из последнего места 64 он может перейти на 1, то этот полный ход есть возвратный».

Таково решение задачи о ходе шахматного коня, данное Эйлером. В письме не указаны ни приемы, ни путь, которыми знаменитый ученый пришел к своему открытию. Сейчас мы укажем на методы иных, более симметричных и методичных решений.

I. Разделим шахматную доску на две части: *внутреннюю*, состоящую из 16 клеток, и *краевую* (рис. 76).

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	a'	b'	c'	d'	d	c
d	c	c'	d'	a'	b'	b	a
a	b	b'	a'	d'	c'	c	d
c	d	d'	c'	b'	a'	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Рис. 76

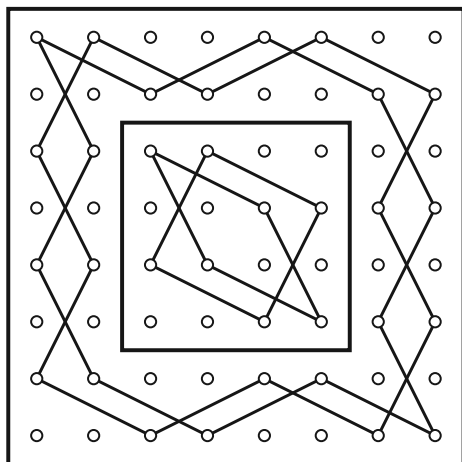


Рис. 77

Каждые 12 клеток краевой доски, обозначенные у нас одинаковыми буквами, дают один из частных зигзагообразных путей шахматного коня вокруг доски; точно так же четыре одноименные клетки внутренней части доски дают частный замкнутый путь шахматного коня в виде квадрата или в виде ромба. Рис. 77 представляет два зигзагообразных частных пути коня на *краевой*

части доски. Эти пути обозначим буквами a и b . Там же начерчены и два пути на *внутренней* части доски. Эти пути назовем a' и b' соответственно обозначениям на рис. 76.

Закончив какой-нибудь частный круговой путь по краевой части доски, конь может перескочить на любой из трех путей другого наименования на *внутренней* части доски. Нетрудно (стоит лишь взять в руки шахматную доску и коня) найти, и притом различными способами, четыре пути из 16 клеток — таких, например, как

$$ab', bc', cd', da'.$$

В самом деле, всмотритесь в рис. 76 и 77 или поставьте перед собой шахматную доску, и вы увидите, что для получения частного пути коня в 16 клеток надо только *краевой* частный круговой путь из 12 клеток соединить с *внутренним* путем, но *другого* наименования, прямой чертой, уничтожая при этом в каждом из частных круговых путей замыкающую линию. Так получим четыре частных круговых пути по 16 клеток. Эти четыре частных пути по 16 клеток опять можно соединить различным образом и получить полный путь шахматного коня из 64 клеток.

Итак, ставят коня на какую-нибудь клетку, например, *краевой* части доски и описывают по ней путь из 12 клеток; вслед за тем конь перепрыгивает на клетку одного из трех (*не одноименных*) *внутренних* путей, проходит этот путь в любом направлении и перескакивает опять на краевую часть, где снова делает следующий частный зигзагообразный путь из 12 клеток, вновь перескакивает на один из внутренних, не одноименных с предыдущим, путей, описывает его, переходит опять на новый краевой путь и т. д., пока не обойдет все 64 клетки.

Способ решения задачи настолько прост и легок, что не нуждается в более подробных разъяснениях и указаниях.

II. Можно эту же задачу решить и другим, не менее легким, приемом. Здесь для удобства доска делится на 4 части по 16 клеток в каждой двумя серединными линиями (рис. 78). 16 клеток каждой четверти, обозначенных одинаковыми буквами, можно соединить посредством сторон двух квадратов и двух ромбов, не имеющих ни одной общей вершины (рис. 79). Соединяя, в свою очередь, одноименные квадраты и ромбы всех четвертей доски, можно получить четыре частных круговых воз-

вратных 180 пути из 16 клеток. Соединяя затем эти последние пути, получим полный путь коня в 64 клетки.

Полезно сделать еще следующие замечания. На каждой четверти доски ромбами и квадратами обозначены по четыре пути коня. Если соединим ромбы и квадраты, обозначенные одинаковыми буквами во всех четырех четвертях доски, получим по четыре частных возвратных пути из 16 клеток.

Некоторые трудности могут представиться кому-нибудь, когда для получения полного пути в 64 клетки он начинает соединять между собой эти четыре частных пути по 16 клеток. Здесь полезно иметь в виду, что *цепь (или ряд ходов) можно видоизменять, не разрывая ее*. Основано это на так называемом правиле Бертрана, которое состоит в следующем.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

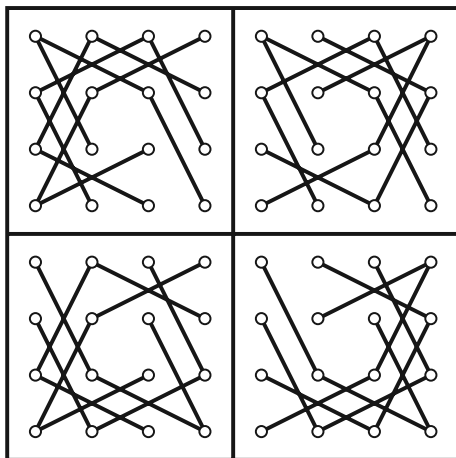


Рис. 79

Пусть имеем незамкнутую цепь ходов, проходящих через клетки $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$, и пусть конечности этой цепи будут A и L . Если клетка, например D , отличная от предпоследней K , находится от последней L на расстоянии хода коня, то DE можно заменить через DL и цепь ходов обратится в

$$ABCDLKJIHGF E,$$

т. е. вторая половина цепи будет пройдена в обратном порядке.

То же самое относится и к тому случаю, когда какая-нибудь клетка, кроме второй, сообщается ходом коня с первой. Итак, цепь (или ряд ходов) можно видоизменять, не разрывая ее.

Число путей, которыми конь может обойти доску и которые можно найти указанными выше приемами, не бесконечно. Но оно настолько огромно, что трудно его представить.

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

С КВАДРАТАМИ

В следующих четырех задачах мы будем заниматься составлением «волшебных квадратов». Так называются квадратные таблицы чисел, в которых суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и в каждой из двух диагоналей квадрата все равны между собой.

159. Расставить три числа

В каждой из 9 клеток квадрата (рис. 80) поставить одно из чисел 1, 2, 3 так, чтобы сумма чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также по любой диагонали равнялась 6. Найти все расстановки.

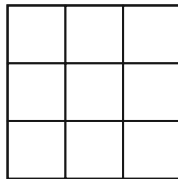


Рис. 80

160. Расставить 9 чисел

В квадрате, состоящем из 9 клеток, расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.

161. Расставить 25 чисел

Расположить 25 чисел, от 1 до 25, в квадрате из 25 клеток так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце, а также по обоим диагоналям квадрата получились одинаковые суммы.

162. Расставить 16 чисел

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить целые числа от 1 до 16 так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду, а также на любой диагонали были равны.

163. Расставить четыре буквы

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить четыре буквы так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали встречалась только одна буква. Как велико число решений этой задачи при одинаковых и разных буквах?

164. Расставить 16 букв

В квадрате, состоящем из 16 клеток, расставить 16 букв (четыре буквы a , четыре b , четыре c , четыре d) так, чтобы в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду любая буква встречалась только один раз.

Аналогичный вопрос можно поставить для квадрата, состоящего из 25, 36 и в общем случае n^2 клеток. Квадратная таблица, в которой каждый ряд является перестановкой некоторого числа различных букв или цифр, причем в каждом столбце буквы или цифры различны, называется *латинским квадратом*. Такие квадраты впервые изучал Эйлер в 1782 году. Термин «латинские» связан с тем, что элементы квадрата обозначались латинскими буквами a , b , c , ... Количество различных латинских квадратов из n^2 клеток очень быстро растет с увеличением числа n . Условимся обозначать через $k!$ произведение всех целых чисел от 1 до k , $k = 1 \times 2 \times 3 \dots \times k$. Известно, что существует не менее чем $n! \times (n - 1)! \dots \times 2! \times 1!$ латинских квадратов размером $n \times n$. Точное значение этого количества известно только при маленьких n .

165. Разместить 16 офицеров

В каждом из четырех полков выбрано по четыре офицера разных званий (полковник, майор, капитан, лейтенант). Требуется разместить эти шестнадцать офицеров в виде квадрата так, чтобы в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду был офицер каждого звания и представитель каждого полка.

166. Шахматный матч

В шахматном матче встречаются две команды, состоящие из четырех человек. Каждый участник должен сыграть по одной партии с каждым игроком противной команды. Требуется составить расписание турнира так, чтобы:

- 1) каждый шахматист сыграл две партии белыми и две партии черными фигурами;
- 2) в каждом туре обе команды играли две партии белыми и две черными фигурами.

Можно предлагать задачи, подобные двум последним, для любого числа n офицеров и полков и для команд с любым числом участников. Легко видеть, что при $n = 2$ первая задача неразрешима. Невозможно разместить четырех офицеров двух званий из двух полков так, как требуется в условии этой задачи. В 1782 году Эйлер предположил, что задача неразрешима при $n = 2, 6, 10, 14, \dots$, т. е. при всех n , которые при делении на 4 дают в остатке 2. Это было подтверждено в 1900 году для $n = 6$. И, наконец, в 1959 году было установлено, что при всех $n \neq 2$ и $n \neq 6$ задачу решить можно. Оказалось, что при $n > 6$ предположение Эйлера неверно. Он ошибся.

ГЕОМЕТРИЯ ПУТЕШЕСТВИЙ

167. О пауке и мухе

На потолке в углу C комнаты (рис. 81) сидит паук, а на полу в противоположном углу K спит муха. Какой путь должен избрать паук, чтобы добраться до мухи по кратчайшему расстоянию?

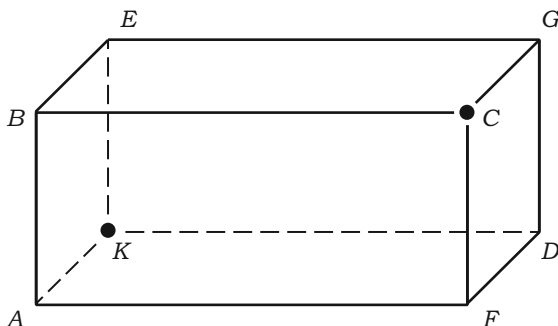


Рис. 81

Мосты и острова

Не приходилось ли вам жить, а может быть, вы и сейчас живете в городе или местности, где течет река, которая делится на протоки и рукава, образующие острова? Через реку и ее протоки переброшены, быть может, мосты, соединяющие различные части города. В Ленинграде, например, очень много подобных протоков, разветвлений Невы и разных каналов, через которые переброшено весьма большое количество мостов и переходов. Не приходила ли вам когда-нибудь в голову мысль (если, конеч-

но, вы живете в местности, где есть река, острова и мосты) совершить такую прогулку, чтобы во время ее перейти все эти мосты, но перейти их так, чтобы на каждом побывать *только по одному разу*? Вряд ли вы думали об этом, а между тем мы стоим здесь перед весьма интересной и важной задачей, поставленной впервые знаменитым математиком Эйлером.

Почуительная сторона предлагаемых задач состоит в исследовании, возможно или нет решение данной задачи, прежде чем приниматься за само решение. Эйлер, в частности, подробно исследовал случай невозможности.

168. Задача Эйлера

Задача, предложенная Эйлером в 1759 году, заключается в следующем.

Река, огибающая остров, делится на два рукава, через которые переброшено семь мостов: a, b, c, d, e, f, g (рис. 82). Спрашивается, можно ли совершить такую прогулку, чтобы за один раз перейти через все эти мосты, не переходя ни через один мост два или более раз?

— Это вполне возможно! — скажет кто-нибудь.

— Нет, это невозможно! — скажет другой.

Но кто прав и кто нет и как это доказать?

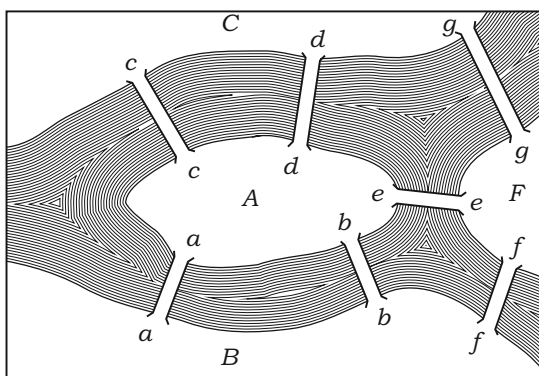


Рис. 82

Самый простой путь решения задачи, казалось бы, такой: сделать *все возможные пробы* таких переходов, т. е. перечислить все возможные пути, и затем рассмотреть, какой или какие из них удовлетворяют условиям вопроса. Но очевидно, что даже в случае только семи мостов приходится делать слишком много таких проб. А при увеличении числа мостов такой способ решения практически совершенно невыносим. Да, кроме того, при одном и том же числе мостов задача изменяется в зависимости еще от *расположения* этих мостов. Поэтому изберем иной, более надежный путь решения задачи.

Прежде всего исследуем, *возможен или нет* искомый нами путь для данного расположения семи мостов. Для облегчения рассуждений введем такие условные обозначения:

Пусть A , B , C и D будут разные части суши, разделенной рукавами реки (рис. 82).

Затем, переход из места A в место B мы будем обозначать через AB — все равно, по какому бы мосту мы ни шли, по a или по b . Если затем из B мы перейдем в D , то этот путь обозначим через BD , а весь переход, или путь из A в D , обозначим через ABD , так что здесь B одновременно обозначает и место прибытия и место отправления.

Если теперь из D перейдем в C , то весь пройденный путь обозначим через $ABDC$. Итак, это *обозначение из четырех букв* показывает, что из места A мы, пройдя места B и D , пришли в C , причем перешли *три* моста.

Значит, если мы перейдем *четвертый* мост, то для обозначения пути нам понадобится *пять* букв. После перехода следующего, пятого моста понадобится обозначить пройденный путь *шестью* буквами и т. д.

Словом, если мы обошли по *одному разу* все семь данных мостов, то наш путь *должен был бы обозначаться восемью буквами* (вообще, если есть n мостов, то для обозначения искомого нами пути через эти мосты понадобится $n + 1$ буква).

Но как и в каком порядке должны идти буквы в этом обозначении?

Между берегами A и B есть два моста. Значит, последовательность букв AB или BA должна быть два раза. Точно так же два раза должно повторяться соседство букв A и C (между этими ме-

стами тоже два моста). Затем, по одному разу должно быть соседство букв A и D , B и D , D и C .

Следовательно, если предложенная задача разрешима, т. е. можно мосты перейти так, как требуется задачей, то *необходимо*:

- 1) чтобы весь путь обозначался восемью буквами;
- 2) чтобы в расположении этих букв соблюдались указанные условия относительно соседства и повторяемости букв.

Разберемся теперь в следующем весьма важном обстоятельстве.

Возьмем, например, местность A , соединенную с другими местностями несколькими мостами: a, b, c, \dots (в данном случае пятью мостами). Если мы перейдем мост a (все равно откуда, из A или из B), то в обозначении пути буква A появится один раз. Пусть пешеход перешел 3 моста a, b и c , ведущие в A . Тогда в обозначении пройденного пути буква A появится два раза, в чем нетрудно убедиться. Если же на A ведут 5 мостов, то в обозначении пути через все эти мосты буква A повторится 3 раза. Вообще, легко вывести, что если число мостов, ведущих в A , есть *нечетное*, то, чтобы узнать, сколько раз в обозначении требуемого пути повторится буква A , надо к этому нечетному числу мостов прибавить единицу и полученное число разделить пополам. То же, конечно, относится и ко всякой иной местности с нечетным числом мостов, которую для краткости будем называть *нечетной местностью*.

Усвоив все предыдущее, приступим к окончательному исследованию задачи Эйлера.

В местность A ведет пять мостов. В каждую из местностей B, C и D ведет по три моста. Значит, все эти местности *нечетные*, и на основании только что сказанного в обозначение полного пути через все семь мостов необходимо, чтобы

буква A вошла $\frac{5+1}{2}$, т. е. 3 раза;

буква B вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

буква C вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

буква D вошла $\frac{3+1}{2}$, т. е. 2 раза;

Всего 9 букв.

Получается, таким образом, что в обозначение искомого пути обязательно должно войти 9 букв. Но мы уже доказали выше, что в случае возможности решения задачи весь путь должен обозначаться *только* восемью буквами. *Итак, задача для данного расположения семи мостов неразрешима.*

Значит ли это, что задача о переходе по одному разу через мосты неразрешима всегда, когда имеется один остров, два рукава реки и семь мостов? Конечно нет. Доказано только, что задача неразрешима для *данного* расположения мостов. При ином расположении этих мостов и решение могло бы быть иное.

Теперь же заметим, что во всех тех случаях, когда число мостов, ведущих в различные места, нечетное, можно применять рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, и, таким образом, убедиться в возможности или невозможности решения задачи.

* * *

Чтобы перейти к более общему решению задачи, необходимо рассмотреть случаи, когда имеется четное число мостов, ведущих откуда-нибудь в другие места.

Пусть, например, из места A переброшено через реку четное число мостов. Тогда при обозначении пути перехода через все мосты по одному разу надо различать два случая: 1) начинается ли путь из A или 2) из другого места.

В самом деле, если из A в B , например, ведут два моста (рис. 83), то путник, отправившийся из A и прошедший по одному разу оба моста, должен свой путь обозначать так: ABA , т. е. буква A повторяется два раза. Если же путник пройдет через те же два моста, но из места B , то буква A появится всего один раз, ибо этот путь обозначится через BAB .

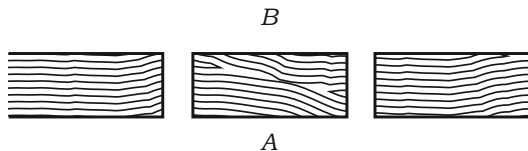


Рис. 83

Предположим теперь, что в A ведут четыре моста, — из одной ли местности или из разных, это все равно. И пусть путник от-

правляется в обход по одному разу всех мостов из места A . Опять легко видеть, что в таком случае при обозначении пройденного пути буква A повторяется три раза; но если начать обход из другой местности, то буква A повторится только два раза. Точно так же в случае шести мостов буква A в обозначении всего пути повторится четыре раза или три, смотря по тому, начался ли переход из A или из другой местности. Словом, можно вывести такое правило:

Если число мостов известной местности четное (четная местность), то в соответствующем обозначении пути буква, обозначающая местность, появляется число раз, равное половине числа мостов, если переход начался из другой местности. Если же переход начался из самой четной местности, то число появлений этой буквы равно половине числа мостов плюс единица.

В любом случае количество появлений буквы, обозначающей четную местность, будет не меньше, чем половина числа мостов, выходящих из этой местности.

Предыдущие рассуждения позволяют вывести общий прием решения каждой подобной задачи о мостах. Во всяком случае мы можем сразу убедиться в невозможности или возможности решения, Поступаем следующим образом:

- 1) Отмечаем общее количество мостов и ставим его в заголовке решения.
- 2) Обозначаем различные местности, разделенные рекой, буквами A , B , C , D , и пишем их в столбец одну под другой.
- 3) Против каждой из местностей пишем во втором столбце число всех ведущих из нее мостов.

Для случая рассмотренной нами задачи о семи мостах будем иметь, значит, такую схему решения:

Число мостов 7	
A	5
B	3
C	3
D	3

Заметим, что сумма чисел второго столбца всегда точно равна двойному количеству мостов. Это следует из того, что у каждого моста мы считаем оба его конца, упирающиеся в различные берега. Кроме того, если в задаче имеются нечетные местности,

то количество их четно, иначе второй столбец при сложении не давал бы четного числа.

4) Припишем третий столбец, поставив в него половины четных чисел второго столбца, а если во втором столбце есть числа нечетные, то прибавляем к ним единицу и пишем в третьем столбце половину полученного числа. (Каждое число третьего столбца не больше числа повторений соответствующей буквы в обозначении пути.)

5) Находим сумму третьего столбца.

Для рассмотренной задачи имеем:

Число мостов 7		
<i>A</i>	5	3
<i>B</i>	3	2
<i>C</i>	3	2
<i>D</i>	3	2
Всего		9

Из сказанного следует, что всегда сумма третьего столбца больше половины суммы второго столбца (т. е. числа мостов) на половину количества нечетных местностей. С другой стороны, сумма третьего столбца не больше суммы чисел повторений всех букв, т. е. количества букв, обозначающих весь путь (оно равно числу мостов плюс 1). Таким образом, если задача разрешима, то половина количества нечетных местностей не должна превышать единицы.

Мы установили в общем случае, что если задача разрешима, то или

1) все местности четные,

или

2) нечетных местностей только две.

Далее мы увидим, что в этих случаях задача о переходе по одному разу через мосты всегда разрешима и в последнем случае обход нужно начинать с одной из нечетных местностей.

169. Переход через 15 мостов

Попробуем теперь решить другую задачу, в которой имеем два острова, соединенных между собой и с берегами реки 15 мостами, как это указано на прилагаемом рисунке (рис. 84).

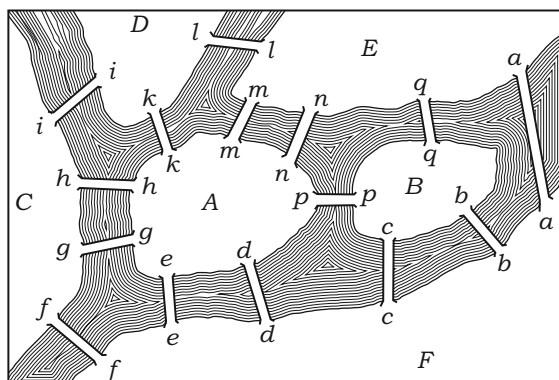


Рис. 84

Спрашивается, можно ли за один раз обойти все эти мосты, не проходя ни через один более одного раза?

Докажем теперь, что если все местности четные, то существует замкнутый путь (кончающийся в местности, с которой он начался), проходящий по каждому мосту ровно один раз. Будем называть длиной пути количество мостов, по которым этот путь проходит. Так, длина пути из решения задачи 169 равна 15. Среди всех путей, которые можно провести по нашим местностям с соблюдением условия задачи, выберем самый длинный путь и обозначим его $abc \dots g$ (где буквы a, b, c, \dots, g — это названия мостов, пересекаемых путем). Обозначим через A местность, в которой он начинается, и предположим, что он заканчивается в местности G , отличной от A . Если путь ранее проходил через G , скажем, r раз, то, двигаясь по нему, мы должны были уже пройти $2r$ мостов, ведущих в G . Поскольку местность G четная, то, войдя в нее по мосту g , мы должны найти еще один мост A , ведущий из G и отличный от уже пройденных $2r$ мостов и моста g . Это означает, что мы можем продолжить путешествие и далее, в противоречие с тем, что выбранный путь имеет максимальную длину. Итак, путь $abc \dots g$ кончается в местности A , с которой начался, т. е. он замкнут. Покажем теперь, что он проходит через каждый мост. Предположим, что он не проходит через некоторый мост f . Ясно, что мост f можно выбрать так, что через одну из соединяемых им местностей проходит путь $abc \dots g$. Для определенности предположим, что ведет в местность B , из которой

выходят мосты a, b . Тогда путь $fbc \dots ga$ имеет длину, на единицу большую, чем $abc \dots g$. Но мы обозначили через $abc \dots g$ самый длинный путь, который только можно провести по нашим местностям. Полученное противоречие доказывает, что путь $abc \dots g$ проходит через все мосты.

Так, например, задачу 168 можно было бы решить, если бы задано было обойти все мосты по два раза каждый, что сводится, в сущности, к удвоению числа мостов, т. е. к обращению всех данных местностей в четные.

Докажем теперь, что требуемый путь существует и во втором случае, когда есть только две нечетные местности, скажем, A и B . Построим новый мост a , соединяющий A и B . Тогда все местности станут четными и, по доказанному выше, существует путь, проходящий по одному разу через все мосты. Этот путь замкнут, следовательно, его можно начинать с любого моста, например с моста a : $abc \dots g$. Легко видеть, что путь $bc \dots g$, концы которого лежат в местностях A и B , решает нашу задачу.

Исследовав задачу и сделав вывод о ее разрешимости, остается только совершить самый обход мостов. Но это уже сравнительно легкая часть задачи. Тем более что в наших доказательствах содержится и способ отыскания нужного пути.

170. Путешествие контрабандиста

Задачу о переходе через мосты можно предлагать в различных видоизменениях. Можно представить ее, например, как путешествие контрабандиста, который решил побывать во всех странах Европы, но так, чтобы через границу каждого государства ему пришлось переходить только один раз.

В данном случае очевидно, что различные страны и их границы будут соответствовать разным местностям и рукавам реки, через которые переброшено по одному мосту (для каждой границы, общей двум странам).

171. О фигурах, вычерчиваемых одним росчерком

Известен анекдот: некто давал миллион рублей каждому, кто начертит следующую фигуру (рис. 85). Но при вычерчивании ставилось одно условие. Требовалось, чтобы фигура эта была вычерчена одним непрерывным росчерком, т. е. не отнимая пера или каран-

даша от бумаги и не удваивая ни одной линии, другими словами, по раз проведенной линии нельзя уже было пройти второй раз.

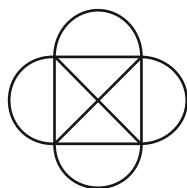


Рис. 85

Надежда стать «миллионером», решив такую легкую задачу, может заставить испортить много бумаги и потратить много времени на попытки вычертить эту фигуру, как требовалось, одним росчерком. Задача, однако, не решается, и это тем досаднее, что она не решается только «чуть-чуть»... Никак не удастся провести *только одной* «последней» какой-либо линии. Удастся даже открыть секрет, что вся трудность в том, чтобы вычертить сначала одним росчерком, не повторяя линии, еще более простую фигуру — четырехугольник с двумя диагоналями (рис. 86). Это, казалось бы, уже совсем просто, а все-таки... не удастся!..

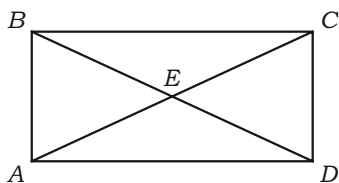


Рис. 86

Сомнения в невозможности решения этой задачи все-таки остаются, тем более что фигуры, гораздо более сложные и трудные с виду, легко вычерчиваются одним росчерком. Так, например, выпуклый пятиугольник со всеми его диагоналями легко вычерчивается одним непрерывным движением без повторения, причем получается фигура, представленная на рис. 87.

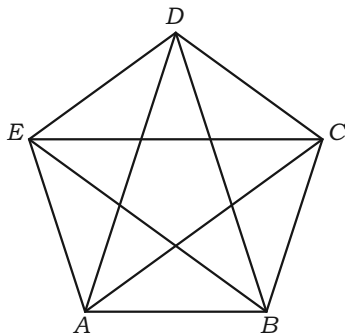


Рис. 87

То же самое легко удастся со всяким многоугольником с нечетным числом сторон и никак не удастся с квадратом, шестиугольником и т. д. — словом, с многоугольником с четным числом сторон.

Теперь нам нетрудно будет разобраться и показать, какую из любых данных фигур можно вычертить одним росчерком, без повторения линий, а какую нет. Каждую из задач подобного рода можно свести к разобранной уже нами *Эйлеровой задаче о мостах*.

В самом деле, возьмем, например, четырехугольник $ABCD$ с двумя его диагоналями, пересекающимися в E (рис. 86). Можно ли его вычертить одним непрерывным росчерком, без повторения линий?

Точки A , B , C , D и E мы представим себе как центры некоторых местностей, разделенных рекой, а линии, соединяющие эти точки, — как мосты, ведущие в эти местности. Что же в данном случае получаем? Пять местностей, из которых четыре *нечетные* и одна *четная*. Мы знаем уже, что в таком случае нельзя за один раз обойти все мосты, не переходя ни через один два раза, или, другими словами, нельзя обойти все данные точки одной непрерывной линией без повторения прежнего пути.

Случаи возможности и невозможности вычерчивания одним росчерком фигур совершенно те же, что и в задаче о мостах. Одна задача, в сущности, сводится к другой.

Всякий нечетный многоугольник со всеми его диагоналями можно вычертить одним росчерком без повторения линий потому, что этот случай соответствует тому, когда данные в задаче о мостах местности все четные.

Соображения, изложенные здесь, одинаково прилагаются ко всякой фигуре, образована ли она прямыми или кривыми линиями, на плоскости или в пространстве. Так, нетрудно видеть, что можно описать одним непрерывным движением все ребра правильного октаэдра и нельзя этого сделать для четырех остальных правильных выпуклых тел.

Говорят, что Магомет вместо подписи (он был неграмотен) описывал одним росчерком состоящий из двух рогов Луны знак, представленный на рис. 88. И это понятно, потому что в данном случае мы имеем дело только с точками четного порядка, а следовательно, вычертить такую фигуру одним росчерком без повторения тех же линий всегда можно.

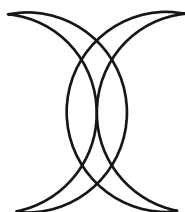


Рис. 88

Всегда можно также вычертить одним росчерком и такую фигуру, где, помимо точек четного порядка, есть и две точки (но не более) нечетного порядка. Весьма красивый и замысловатый образчик такой фигуры, заключающий в себе две нечетные точки A и Z , показан на рис. 89. С какой-нибудь из этих точек и надо начинать непрерывное вычерчивание фигуры, как мы уже знаем из задачи о мостах.

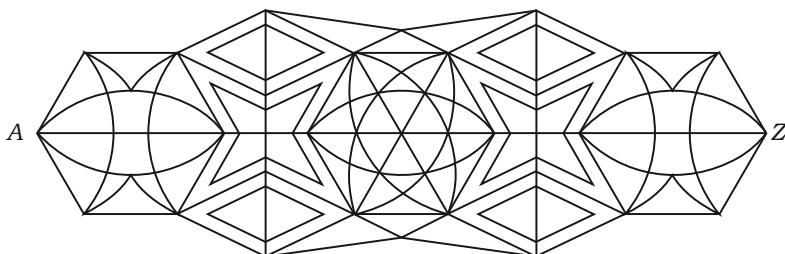


Рис. 89

Нельзя вычертить одним росчерком фигуры на рис. 90 и 91, при всей их видимой простоте, так как в первой восемь, а во второй — двенадцать точек нечетного порядка. Первая может быть вычерчена не менее как *четырежды*, т. е. состоящей из четырех непрерывных кусков, а вторая — не менее как *шестью* линиями.

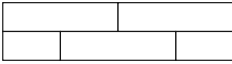


Рис. 90

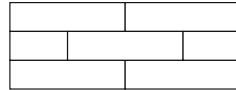


Рис. 91

Таких примеров можно подобрать сколько угодно. Для упражнения предлагаем читателю заняться во время досуга вычерчиванием с одного росчерка фигур, приведенных на рис. 92.

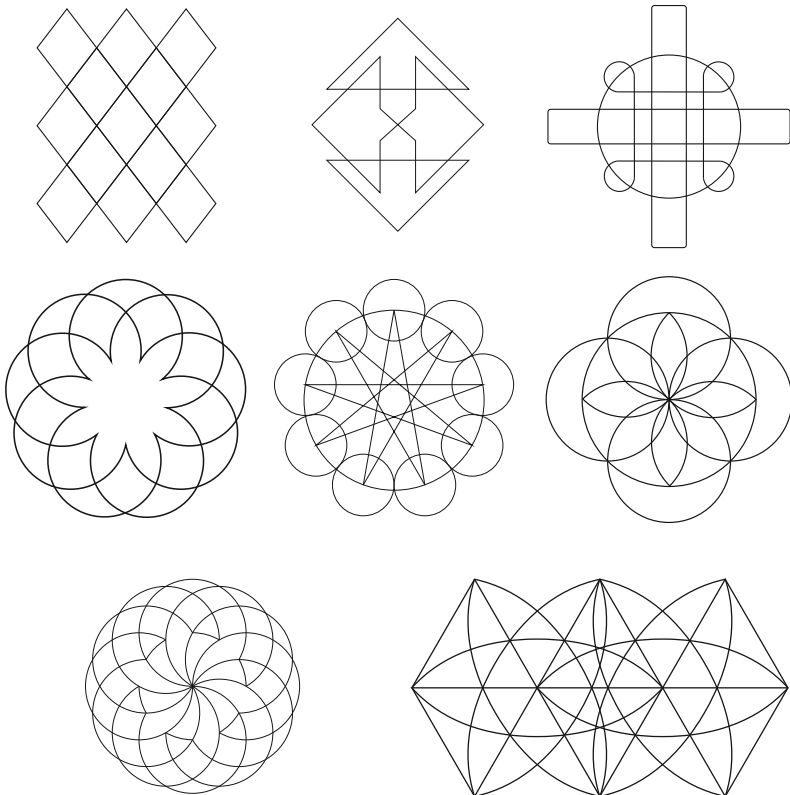


Рис. 92

172. В мастерской

В мастерской имеется 10 различных станков. Известно, что каждый из 10 рабочих этой мастерской умеет работать только на двух станках и на каждом станке умеют работать только два рабочих. Можно ли расставить рабочих у станков так, чтобы каждый стоял у станка, на котором умеет работать?

ЛАБИРИНТЫ

Происхождение задачи о лабиринтах относится к глубокой древности и теряется во мраке легендарных сказаний. Древние — да, пожалуй, многие и теперь, — задачу о лабиринтах считали вообще неразрешимой. Человек, попавший в лабиринт, не мог уже из него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь.

Из настоящего раздела мы, наоборот, увидим, что безвыходных лабиринтов нет, что разобраться и найти выход из самого запутанного лабиринта не составляет особого труда. Решению задачи мы предположим историческую справку о лабиринтах.

Слово «лабиринт» — греческое и в переводе означает ходы в подземельях. Существует, действительно, очень много природных подземных пещер с таким огромным количеством по всем направлениям перекрещивающихся коридоров, закоулков и тупиков, что нетрудно в них заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть от голода и жажды.

Примеры такого же рода, но уже искусственных лабиринтов, могут представить шахты иных рудников, или так называемые «катакомбы».

Вероятнее всего, что подобные подземелья возбудили у строителей еще древнейших времен желание подражать им искусственными сооружениями. И у древних писателей мы встречаем указание на существование искусственных лабиринтов, например, у египтян. В конце концов, словом «лабиринт» чаще всего обозначали именно искусственное чрезвычайно сложное сооружение, составленное из очень большого числа аллей или галерей, бесчисленные разветвления, перекрестки и тупики которых заставляли попавшего туда бесконечно блуждать в тщетных по-

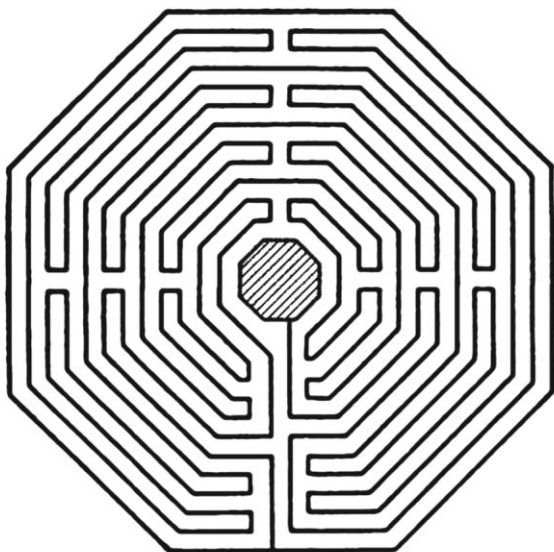
исках выхода. Об устройстве таких лабиринтов слагались целые легенды.

Известнее всего рассказ о лабиринте, построенном мифическим Дедалом на острове Крит для мифического же царя Миноса. В центре лабиринта жило чудовище Минотавр, и никто из попавших туда не мог выйти обратно, делаясь в конце концов жертвой чудовища. Семь юношей и семь девушек приносили афиняне в дань ежегодно чудовищу, которое преисправно их пожирало. Наконец Тезей не только убил Минотавра, но и вышел из лабиринта, не заблудившись в нем, при помощи, впрочем, нити из клубка царевны Ариадны. С той поры слова «нить Ариадны» имеют символическое значение как способ, дающий выход из самого затруднительного положения.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились еще и запутанно-сложные галереи, и ходы пещер, и архитектурные лабиринты над могилами, и извилистые планы на стенах или полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, и извивающиеся тропинки на почве, и рельефные извилины в скалах.

Рисунками лабиринтов украшались одеяния христианских императоров до девятого столетия, и остатки таких же украшений сохранились до сих пор на стенах церквей и соборов того времени. Вероятно, эти украшения служили символом сложности жизненного пути и человеческих заблуждений. Особенно употребительны были лабиринты в первой половине двенадцатого столетия. Во Франции того времени лабиринты выкладывались из камня или изображались на полу церквей и соборов. Они назывались большей частью «путь в Иерусалим» и служили символом трудного земного путешествия в «святые места», наградой за которое является небесная благодать, поэтому центр лабиринта часто называли «небом».

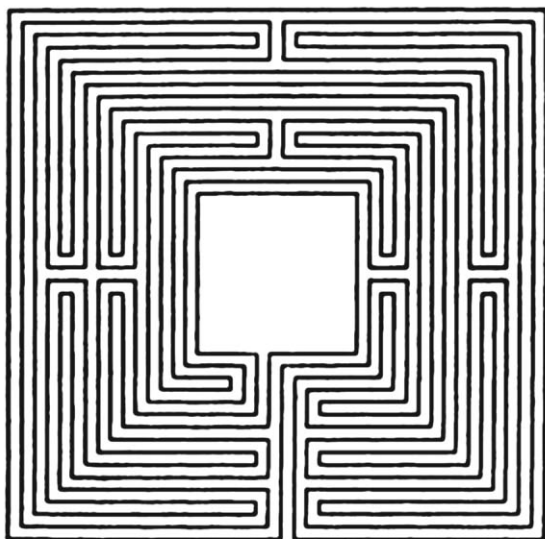
В Англии не встречаются лабиринты на церковном полу, но зато было очень много лабиринтов, сделанных из дерна на лужайках. Они носили различные названия: «Город Троя», «Следы пастуха» и т. п. О таких лабиринтах упоминает Шекспир в своих пьесах «Сон в летнюю ночь» и «Буря».



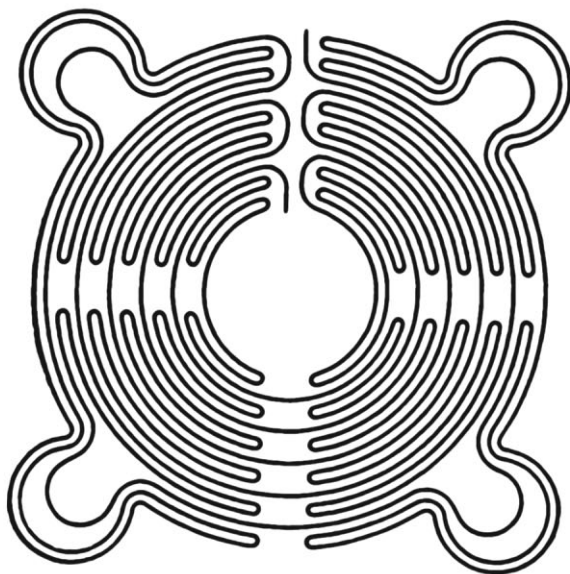
1. Лабиринт, выложенный из камня на полу храма святого Квентина во Франции. Вход снизу по вертикальной линии



2. Лабиринт в Шартрском соборе во Франции



1. «Дерновый» лабиринт (33—34 м в диаметре), просуществовавший до 1797 года в Англии в графстве Эссекс



2. Итальянский лабиринт XVI столетия

Все эти лабиринты имеют более исторический, чем математический интерес. Распутать их нетрудно. С течением времени фигуры эти потеряли свое символическое значение и сделались мало-помалу предметом развлечения. Лабиринты переходят в сады, цветники и парки, где путем проведения прихотливо извивающихся, то пересекающихся, то внезапно прегражденных или заканчивающихся тупиком дорожек получались самые запутанные и головоломные фигуры, в которых, действительно, нелегко было найти дорогу от края к центру и где трудно было не заблудиться.

Приведенная историческая справка показывает, насколько стар вопрос о лабиринтах и вместе с тем насколько многих он интересовал в свое время. Люди изошрялись в изобретении самых замысловатых и «безвыходных» лабиринтов. Но, в самом деле, возможно ли построить или даже начертить безвыходный лабиринт, т. е. такой, в котором найти путь к его центру и найти отсюда обратный выход было бы только делом удачи, случая, счастья, а не совершенно определенного и правильного математического расчета?

Разрешение этого вопроса принадлежит сравнительно позднему времени, и начало ему положено знаменитым Эйлером. Результаты произведенных в этом отношении изысканий привели к заключению, что *нет безвыходных лабиринтов*.

Разрешение каждого лабиринта может быть найдено, и притом сравнительно простым путем. Внимательный читатель сам сейчас убедится в этом.

Геометрическая постановка задачи о лабиринтах

Аллеи, дорожки, коридоры, галереи, шахты и т. п. лабиринты тянутся, изгибаясь во все стороны, перекрещиваются, расходятся по всевозможным направлениям, ответвляются, образуют тупики и т. д. Но мы для большей ясности рассмотрения вопроса все перекрестки обозначим просто точками, а все эти аллеи, дорожки, коридоры и т. д. будем принимать просто за линии, прямые или кривые, плоские или нет — все равно, но эти линии соединяют наши точки (перекрестки).

Эти точки и эти линии вместе составляют *геометрическую сеть*, или *лабиринт*, если какая-либо точка, движущаяся по линиям

этой сети, может прийти к любой другой точке, не покидая линий нашей системы (или сети).

Приняв это, мы докажем, что подобная движущаяся точка (представляющая, например, человека) может последовательно описать все линии сети без всяких скачков и перерывов и при этом по каждой линии сети она пройдет ровно два раза. При этом она конечно же пройдет через точку, обозначающую выход из лабиринта.

Возможность обхода следует, вообще говоря, из того, что фигуру, полученную из сети удвоением всех линий, можно описать одним росчерком (см. задачу 171). Однако дополнительные трудности связаны с тем, что блуждающий в лабиринте не имеет его плана и видит только участок, находящийся в непосредственной близости от него. Мы докажем ниже, что и при таком ограничении обход может быть совершен.

Но еще раньше, чем приступить к этому доказательству, можно доставить себе довольно интересное математическое развлечение, которое поможет уяснить все предыдущее и весьма полезно будет для усвоения самого доказательства. На листе белой бумаги возьмите произвольно несколько точек и соедините их по две столько раз, сколько хотите, произвольным числом прямых или кривых линий, но так, чтобы ни одна точка системы не осталась совершенно изолированной. Итак, вы получите то, что мы назвали геометрической сетью. Или нарисуйте, например, сеть трамваев или троллейбусов города, сеть железных дорог страны, сеть рек и каналов и т. д., прибавьте к ним, если хотите, границы страны — вы опять получите геометрическую сеть, или лабиринт (для начала, конечно, лучше брать не особенно сложную сеть).

Теперь на куске непросвечивающей бумаги или картона вырежьте небольшое отверстие, через которое была бы видна только небольшая часть составленной вами решетки, или лабиринта. Без такого приспособления в глазах рябит и легко запутаться в сети. Затем направьте окуляр (отверстие для глаза) вашего «экрана» на какой-либо перекресток (точку) вашей сети, например точку, которую назовем A , и дайте себе такое задание: обежать этим окуляром непрерывно все линии сети два раза (пройти каждый путь вперед и назад) и возвратиться в точку A . Чтобы помнить уже пройденные окуляром линии, примите за правило на каждой проходимой линии ставить поперечную черточку при входе

в перекресток и при выходе из него. Отсюда следует, что две оконечности каждого пути от перекрестка до перекрестка (от точки до точки) после выполнения задания (пройти каждую сеть линии два раза) должны быть обозначены двумя поперечными черточками, но не более.

Если мы имеем дело с действительным лабиринтом, или галереями подземных шахт, с разветвлениями пещер и т. д., то блуждающему в этих шахтах вместо черточек на бумаге придется делать уже иной знак, чтобы ориентироваться, и класть, например, камень при входе и выходе из каждого перекрестка — в галерею, которую он покидает, и в той, в которую он входит.

Но обратимся к упомянутому раньше доказательству, что всякий лабиринт разрешим, что нет «безвыходного» лабиринта. Другими словами, решим общую задачу о лабиринтах.

Решение задачи о лабиринтах

П р а в и л о I. Отправляемся от начального пункта (первого перекрестка) и идем по какой угодно дороге, пока не приходим или в тупик, или к новому перекрестку. Тогда:

1. Если окажется, что мы попали в тупик, то возвращаемся назад и пройденный путь должен быть уже отброшен, так как мы его прошли два раза (вперед и обратно).
2. Если же мы приходим к новому перекрестку, то направляемся по новому произвольному пути, не забывая только всякий раз отметить поперечной черточкой путь, по которому мы прибыли, и путь, по которому отправились дальше.

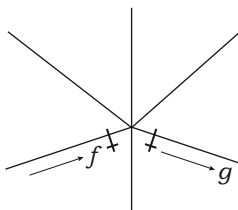


Рис. 93

Как это показано на рис. 93, где мы движемся в направлении, показанном стрелкой f , мы приходим к пересечению путей и берем на-

правление, обозначенное стрелкой g , но тот и другой путь мы обозначаем черточкой (на рисунках крестиками обозначены черточки, поставленные при последнем прохождении через перекресток).

Мы следуем указанному выше первому правилу всякий раз, когда приходим на такой перекресток, на котором мы еще не были. Но в конце концов мы должны прийти к перекрестку, на котором мы уже были, и здесь может представиться два случая. На известный уже нам пункт мы приходим по дороге, уже раз пройденной нами, или же по пути новому, не отмеченному еще черточкой. Следует придерживаться таких правил:

П р а в и л о III. Прибыв на известный уже наш перекресток по новой дороге, мы должны сейчас же повернуть обратно, предварительно отметив этот путь двумя черточками (прибытие и обратное отправление), как это указано на рис. 94.

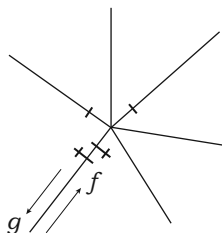


Рис. 94

П р а в и л о III. Если мы приходим на известный нам перекресток таким путем, которым уже раз прошли раньше, то, отметив этот путь второй черточкой, отправляемся дальше путем, которым мы еще не шли, если только такой путь существует. Этот случай изображен на рис. 95.

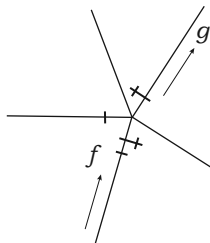


Рис. 95

Но если такого пути нет, то выбираем дорогу, по которой прошли только один раз. Случай этот изображен на рис. 96.

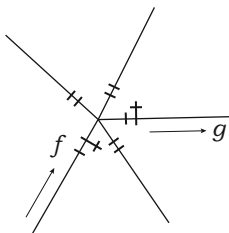


Рис. 96

Придерживаясь точно указанных правил, мы обойдем два раза все линии сети и придем в точку отправления. Это можно доказать, сделав и уяснив себе предварительно такие замечания:

1. Выходя из точки отправления, скажем A , мы ставим начальный знак (поперечную черточку).
2. Прохождение через перекресток по одному из предыдущих трех правил каждый раз добавляет два знака (две поперечные черточки) на линиях, которые сходятся в этой точке.
3. В любой момент прохождения лабиринта, перед прибытием на какой-либо перекресток или после отправления из него, начальный перекресток (пункт отправления) имеет нечетное число знаков (черточек), а всякий другой перекресток имеет их четное число.
4. В любой момент, до или после прохода через перекресток, начальный перекресток имеет только один путь, обозначенный только одной черточкой. Всякий же иной из посещенных уже перекрестков может иметь только два пути, обозначенных одной черточкой.
5. После полного обхода лабиринта у всех перекрестков все пути должны иметь по две черточки. Это, впрочем, входит прямо в условие задания.

Приняв во внимание все вышеизложенное, мы легко убедимся, что если кто-либо отправляется из начального перекрестка, скажем A , и прибывает в какой-либо иной перекресток M , то он не может встретить таких трудностей задачи, которые могли бы остановить его дальнейшее путешествие. В самом деле, в это ме-

сто он приходит или новым путем, или путем, который уже один раз пройден. В первом случае прилагается первое или второе из данных выше правил. Во втором случае вступление на перекресток M и остановка здесь дала бы *нечетное* число знаков около него, следовательно, за неимением нового пути надо пойти по уже пройденному один раз пути, и около перекрестка будет четное число знаков (если он не начальный) по замечанию 3.

Пусть, наконец, мы будем вынуждены закончить наш путь и возвратиться в начальный перекресток A . Назовем эту последнюю линию ZA , т. е. она ведет из перекрестка Z в начальный A . Этот путь должен быть необходимо тем самым, которым мы отправились первый раз из A , иначе путь можно было бы продолжить. И если теперь мы принуждены этим же путем возвратиться в начальную точку, то это значит, что из перекрестка Z нет уже никакого другого пути, который бы не был уже 2 раза пройден. Иначе это значило бы, что забыли применить первую часть правила III, более того, это значило бы, что в Z есть какой-то путь YZ , пройденный только один раз по замечанию 4. Итак, при последнем возвращении в A все пути в Z должны быть отмечены двумя черточками. Точно так же это можно доказать для предшествующего перекрестка Y и для всех остальных. Другими словами, наше предложение доказано, и задача решена.

173. Головоломный лабиринт

Приведем один не построенный, а только начерченный лабиринт (рис. 97) с готовым и упрощенным решением его: все тупики (слепые проходы) в нем уже заштрихованы, и главнейшие пути указаны точечными или штриховыми линиями. И по решению, данному на этой фигуре, видно, что от A надо сначала идти к C и потом от F к B .

Но, когда мы придем к C , у нас появляются три дороги, обозначенные 1, 2, 3, чтобы дойти до D . Точно так же, когда мы дойдем до E , тоже видны три дороги, обозначенные 4, 5, 6, чтобы дойти до F . У нас есть также обозначенная точками дорога от C до E , другая — обозначенная точками дорога от D до F и проход от D до E , указанный звездами. Мы можем, следовательно, выразить положение дела маленькой упрощенной диаграммой на рис. 98.

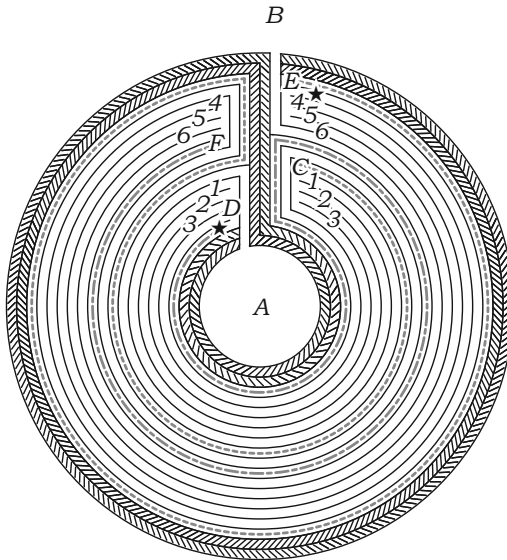


Рис. 97

Здесь все пути соответствуют путям кругообразного лабиринта, но только более доступны глазу. И вот при таких-то условиях, при условии также, которое здесь можно выполнить, не проходить дважды через один и тот же проход, окажется 640 путей от *A* до *B*.

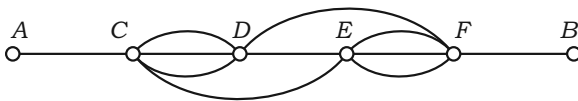


Рис. 98

Для головоломного лабиринта это — не правда ли? — довольно хорошо.

174. Беседка

А теперь, почтенный читатель, после изложенного уже и, думаем, усвоенного вами решения задачи о лабиринтах, для вас будет нетрудно найти путь к хижине, расположенной в парке, изображенном на рис. 99. Быть может, для сокращения времени вам не бесполезен будет совет начать поиски от хижины и найти лучше

выход из этого коварного парка, чем начинать с входа. Впрочем, при наличии свободного времени это безразлично.

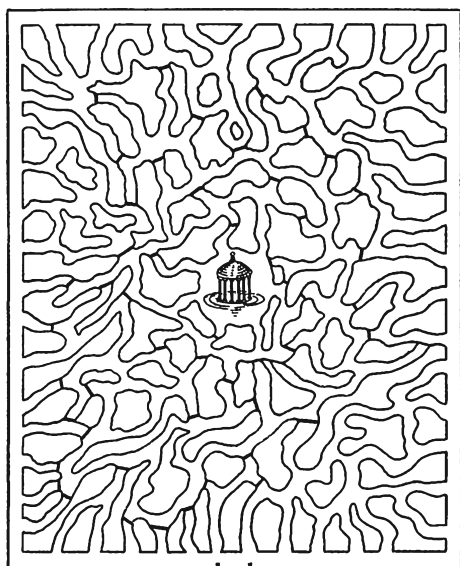


Рис. 99

175. Еще лабиринт

Вот еще любопытный образчик лабиринта, в котором надо пробраться по кратчайшей дороге к центру (рис. 100).

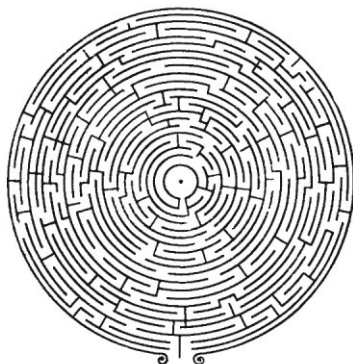


Рис. 100

176. Лабиринт английского короля

В одном из дворцовых садов английского короля Вильгельма III был лабиринт из аллей и изгородей. Аллеи были около полумили длиной, а в центре находились два больших дерева со скамейками около них. План лабиринта изображен на рис. 101.

Способ пройти к центру и выйти из сада состоял в том, чтобы вступив в лабиринт, с первого же шага и до конца касаться изгороди правой рукой.

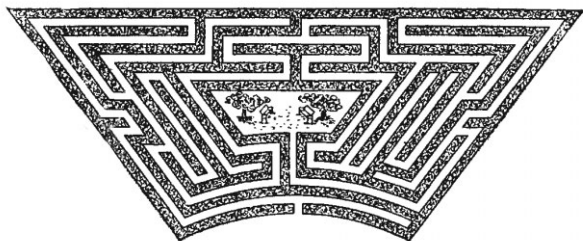


Рис. 101

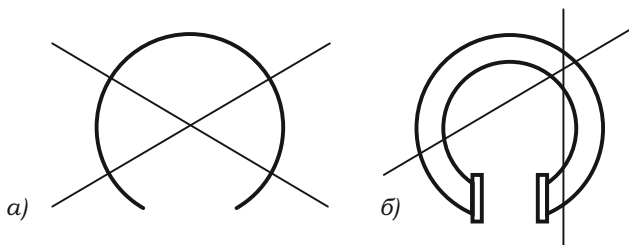
РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

1. ЗАДАЧИ-ШУТКИ, ЗАДАЧИ-ЗАГАДКИ И ШУТОЧНЫЕ ИСТОРИИ

1. Один человек берет яблоко вместе с корзиной.
2. Иной, пожалуй, начнет вычислять так: 4 кошки в углах, по 3 кошки против каждой —это еще 12 кошек, да на хвосте каждой кошки по кошке, значит, еще 16 кошек. Всего, значит, 32 кошки. Пожалуй, по-своему он будет и прав. Но еще более прав будет тот, кто сразу сообразит, что в комнате находится всего-навсего четыре кошки. Ни более, ни менее.
3. Если этот вопрос задан быстро и отвечающий не имеет времени на размышление, то часто можно услышать неправильный ответ: по истечении 8 дней. На самом деле последний кусок будет отрезан по истечении 7 дней.
4. Написать это число, а затем повернуть бумажку «вверх ногами» (на 180°). Получится 999.

5. Может, например: $\frac{-3}{6} = \frac{5}{-10}$.

6. Если вы начертите подкову в виде дугообразной линии, как это обычно и делают, то, сколько бы вы ни ломали голову, вам не удастся разрезать ее двумя прямыми более чем на пять частей (рис. 102, а).

*Рис. 102*

Другое дело, если вы нарисуете подкову имеющей ширину, т. е. так, как она выглядит в действительности. Тогда после нескольких проб вы нападете на верное решение задачи, разрежете подкову двумя прямыми на шесть частей (рис. 102, б).

7. Старик шепнул казакам: «Пересядьте». Те поняли, мигом пересели каждый на лошадь своего противника, и каждый погнал теперь во всю прыть чужую лошадь, на которой он сидел, чтобы собственная его лошадь пришла второй.

II. УПРАЖНЕНИЯ СО СПИЧКАМИ

8. Четыре спички положены так, как показано на рис. 1. Прибавляя к ним еще пять, положенных поперечно, образуем слово сто (рис. 103).



Рис. 103

9. Спички прикладываются так, как показано на рис. 104. Образуется слово: три.



Рис. 104

10. См. рис. 105.

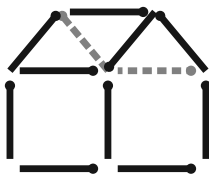


Рис. 105

11. См. рис. 106.



Рис. 106

12. См. рис. 107.

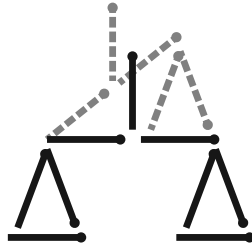


Рис. 107

13. См. рис. 108.

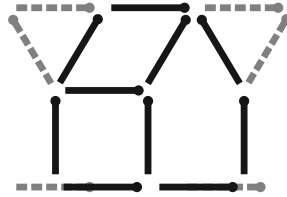


Рис. 108

14. См. рис. 109.

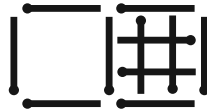


Рис. 109

15. См. рис. 110.



Рис. 110

16. См. рис. 111.

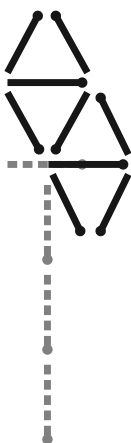


Рис. 111

17. См. рис. 112.

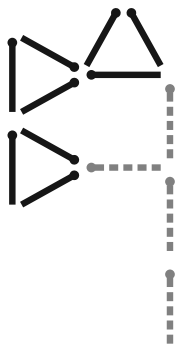


Рис. 112

18. См. рис. 113.

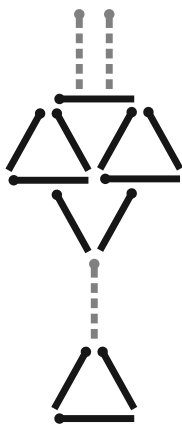


Рис. 113

19. См. рис. 114.

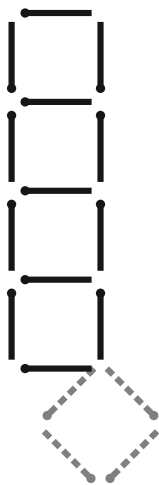


Рис. 114

20. См. рис. 115.

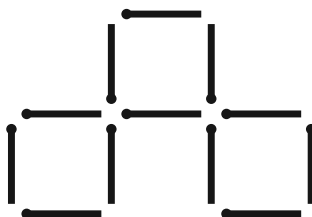


Рис. 115

21. См. рис. 116.

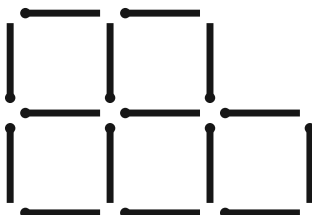


Рис. 116

22. См. рис. 115.

23. См. рис. 117.

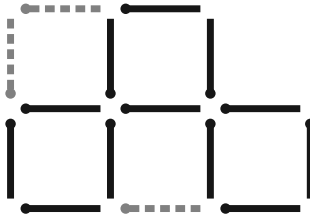


Рис. 117

24. См. рис. 118.

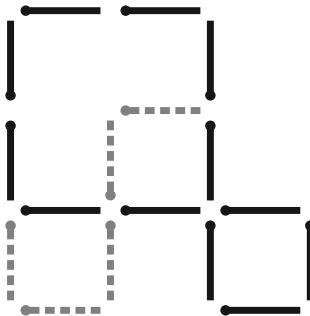


Рис. 118

25. См. рис. 119.

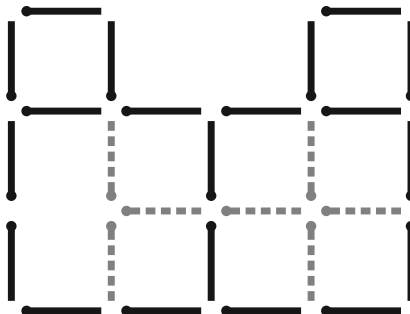


Рис. 119

26. 1) Это можно сделать, например, так, как показано на рис. 120.

2) Решения приведены на рис. 121.

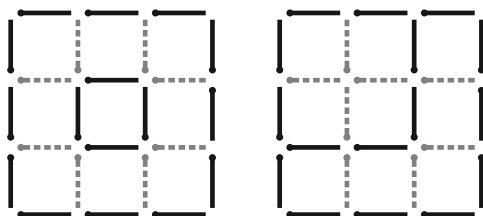


Рис. 120

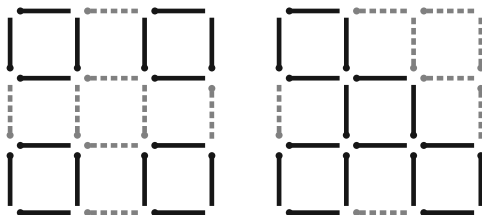


Рис. 121

27. Можно смело поручиться, что мало кому сразу придет в голову решение этой простой задачи. Дело в том, что в данном случае приходится строить из спичек не плоскую фигуру, а фигуру в *пространстве*.

Задачу решите, внимательно взглядевшись в рис. 122. На нем изображена трехгранная *пирамида*, все грани которой являются равными между собою равносторонними треугольниками. Положите на стол три спички так, чтобы они составили треугольник, затем поставьте остальные три спички так, чтобы они нижними своими концами упирались в углы лежащего на столе треугольника, а верхними концами соединились вместе над его серединой, — и вы выполните то, что требуется задачей.

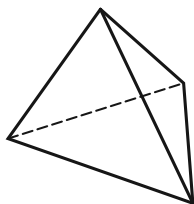


Рис. 122

28. Эта на первый взгляд трудная задача решается, однако, легко.

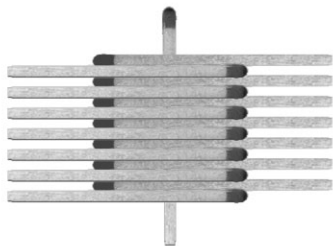


Рис. 123

Положим на стол спичку А (рис. 123), а поперек этой спички положим затем вплотную одну около другой попеременно вправо и влево головками четырнадцать спичек так, чтобы их головки выдавались на 1–1,5 сантиметра над А, в то время как противоположные концы опирались бы на стол. Сверху в углубление, образуемое верхними частями спичек, положим шестнадцатую спичку параллельно А. Если поднять теперь спичку А за конец, то, к нашему удивлению, вместе с ней поднимутся и остальные 15 спичек (рис. 124).

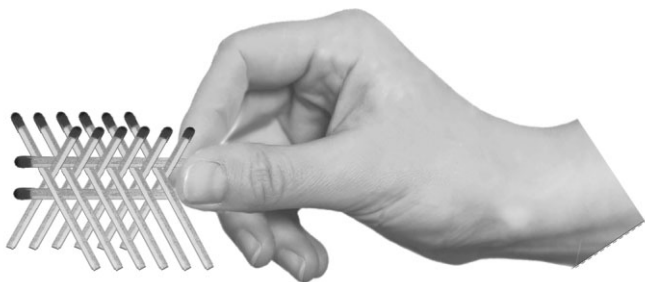


Рис. 124

III. КАК СОСЧИТАТЬ?

30. Напрашивающийся ответ «семь», конечно же, неверен. Нужно учитывать как те суда, которые уже плывут в Гавр, так и те, которые еще будут отправляться в путь.

В момент выхода парохода из Гавра в пути, направляясь в Гавр, находится 8 судов компании (одно из них входит в Гавр и одно выходит из Нью-Йорка). Наш пароход встретит все эти 8 судов. Кроме того, в течение его семидневного плавания из Нью-Йорка выйдет еще 7 судов (последнее — в момент прихода парохода в Нью-Йорк). Они также будут встречены пароходом. Итак, правильный ответ — 15 судов.

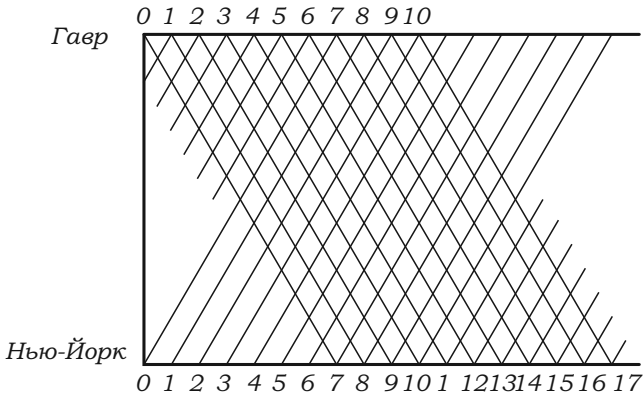


Рис. 125

Представим себе решение задачи нагляднее с помощью графика. На рис. 125 нарисованы графики движения пароходов компании, дни отложены по горизонтальным осям. Из рисунка видно, что пароход, график движения которого изображен отрезком АВ, встретит в океане 13 судов, да еще два в момент отправления и прибытия, а всего 15 судов. График показывает, кроме того, что встречи будут происходить ежедневно в полдень и в полночь.

31. Задача сразу решается, если сообразить, что последнему (шестому) покупателю досталось одно целое яблоко. Значит, пятому досталось 2 яблока, четвертому 4, третьему 8 и т. д. Всего же яблок было $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$, т. е. крестьянка принесла на рынок 63 яблока.

32. Часто при решении подобных задач рассуждают так: гусеница за сутки, т. е. за 24 ч, взползет на 5 м без 2 м. Значит, всего в сутки она

всползет на 3 м. Следовательно, высоты 9 м она достигнет по истечении трех суток, т. е. она будет на этой высоте в среду в 6 ч утра.

Но такой ответ, очевидно, неверен: в конце вторых суток, т. е. во вторник в 6 ч утра, гусеница будет на высоте 6 м; но в этот же день, начиная с шести часов утра, она до 18 ч может всползти еще на 5 м. Следовательно, на высоте 9 м, как легко рассчитать, она окажется во вторник в 13 ч 12 мин. (Естественно, надо считать, что гусеница все время движется равномерно.)

33. Очень часто при решении этой задачи пускаются в разные «тонкие» и сложные выкладки и соображения, не дав себе труда уяснить, что муха, не останавливаясь, летала ровно 3 часа, а следовательно, пролетела 300 километров.

34. Эта задача очень похожа на предыдущую. Ответ не зависит от того, кому из путешественников, первому или второму, принадлежит собака. Второй путешественник догонит первого через 4 ч, и за это время собака пробежит $4 \times 15 = 60$ км.

35. Всякое число, оканчивающееся на 5, можно представить в виде $10a + 5$, где a — число десятков. Тогда

$$\begin{aligned}(10a + 5)^2 &= 100a^2 + 2 \times 5 \times 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25 = \\ &= a \times (a + 1) \times 100 + 25.\end{aligned}$$

Это равенство показывает, почему к числу $a \times (a + 1)$ нужно справа дописать 25, чтобы получить квадрат числа $10a + 5$.

Аналогичным приемом можно пользоваться при возведении в квадрат не только двухзначных, но и любых целых чисел, оканчивающихся на 5. В этом случае не всегда легко производить нужные вычисления в уме. Однако он создает большую экономию во времени при умножении на бумаге. Так, например,

$$\begin{array}{ll}10 \times 11 = 110, & \text{значит, } 105^2 = 11\ 025, \\12 \times 13 = 156, & \text{значит, } 125^2 = 15\ 625, \\123 \times 124 = 15\ 252, & \text{значит, } 1235^2 = 1\ 525\ 225.\end{array}$$

36. Так как при перенесении цифры 2 на первое место число удваивается, то предпоследняя цифра его должна быть 4 ($2 \times 2 = 4$), предшествующая ей должна быть 8 ($2 \times 4 = 8$), перед ней 6 ($8 \times 2 = 16$), затем 3 ($1 + 2 \times 6 = 13$), затем 7 ($1 + 2 \times 3 = 7$) и так далее. Наше число должно начинаться с 1. Поэтому следует остановиться, когда после удвоения цифры и добавления 1 от цифр предыдущего разряда мы получим 1. Искомое число

Это одно из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Все остальные (их бесконечно много) можно получить, продолжая указанный процесс далее. Легко видеть, что каждое из них будет состоять из повторяющейся несколько раз комбинации цифр, уже найденной нами.

37. Легко видеть, что если к искомому числу добавить единицу, то результат будет делиться без остатка на 2, 3, 4, 5 и 6. Наименьшее число с этим свойством есть 60 (наименьшее общее кратное) и все такие числа содержатся в ряду 60, 120, 180, ... Искомое число делится на 7, значит в указанном ряду нужно найти число, дающее при делении на 7 остаток 1. Этому условию отвечает число 120. Итак, число 119 – наименьшее, решающее задачу.

39. Нужно подойти к каждому яблоку и возвратиться обратно к корзине. Значит, число пройденных метров будет равно удвоенной сумме первых ста чисел, или сто раз взятому 101, т. е. 10 100. Это составит почти ровно *десять километров*. Как видим, способ собирания довольно утомительный!

40. Наибольшее количество ударов, отбиваемых обыкновенными часами, есть 12. Задача сводится к тому, чтобы узнать сумму всех чисел от 1 до 12. А это, мы уже знаем, будет половина двенадцать раз взятых тринадцати. Но в сутках два раза 12 часов, или 24 часа. Значит, часы сделают ровно 12 раз по 13 ударов, т. е. 156 ударов ($12 \times 13 = 156$).

Если же часы отбивают также и получасы, то сколько всего ударов они делают в сутки? Полагаю, что вы без труда ответите на этот вопрос.

42. Нам нужно найти сумму всех нечетных чисел от 1 до $2n - 1$ и убедиться, что она равна n^2 . Это можно сделать различными способами. Мы предпочли геометрический.

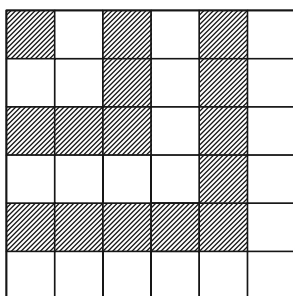


Рис. 126

Возьмем квадрат из n^2 клеток и заштрихуем клетки так, как это сделано на рис. 126 для $n = 6$. Квадрат при этом распадается на чередующиеся по цвету участки. Сосчитаем количество клеток в них, начиная с левого верхнего угла. Первый участок состоит из одной клетки, второй — из 3 клеток, третий — из 5 и так далее, последний n -й участок состоит из $2n - 1$ клеток. Следовательно, число клеток в квадрате равно

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1.$$

Это убеждает нас, что нужное равенство выполнено всегда.

С помощью геометрических представлений можно вычислять и многие другие суммы.

IV. ПЕРЕПРАВЫ И РАЗЪЕЗДЫ

43. Стоит взглянуть на прилагаемый здесь рисунок (рис. 127), чтобы понять, как решается задача.

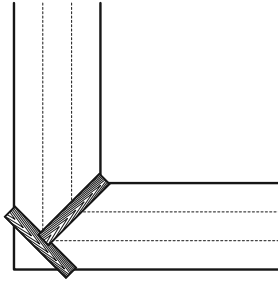


Рис. 127

Что касается математического доказательства возможности подобной переправы, то оно следует из неравенства $2\sqrt{2} < 3$ и делается очевидным, если принять ширину рва равной трем каким-либо единицам.

44. Дети переехали реку. Один из мальчиков остался на берегу, а другой пригнал лодку к солдатам и вылез. Тогда сел солдат и переправился на другой берег. Мальчик, оставшийся там, пригнал обратно лодку к солдатам, взял своего товарища, отвез на другой берег и снова доставил лодку обратно, после чего вылез, а в нее сел другой солдат и переправился. Таким образом — после каждых двух перегонов лодки через реку и обратно — переправлялся один солдат. Так повторялось столько раз, сколько было солдат.

45. Ясно, что приходится начать с козы. Крестьянин, перевезя козу, возвращается и берет волка, которого перевозит на другой берег, где его и оставляет, но зато берет и везет обратно на первый берег козу. Здесь он оставляет ее и перевозит к волку капусту. Вслед затем, возвратившись, он перевозит козу, и переправа оканчивается благополучно.

46. Задача имеет почтенную давность. Обозначим большими буквами А, Б, В рыцарей, а их оруженосцев соответственно малыми а, б, в.

Имеем:

Первый берег				Второй берег		
А	Б	В		•	•	•
а	б	в		•	•	•

I. Сначала отправляются два оруженосца:

А	Б	В		•	•	•
•	•	в		а	б	•

II. Возвращается один из оруженосцев и перевозит третьего:

А	Б	В		•	•	•
•	•	•		а	б	в

III. Возвращается один из оруженосцев и остается со своим рыцарем. Два других рыцаря отправляются к своим оруженосцам:

•	•	В		А	Б	•
•	•	в		а	б	•

IV. Один из рыцарей возвращается со своим оруженосцем, оставляет его и забирает с собой рыцаря.

•	•	•		А	Б	В
•	б	в		а	•	•

V. Оруженосец а переезжает и забирает одного из оставшихся оруженосцев:

•	•	•		А	Б	В
•	•	в		а	б	•

VI. Рыцарь забирает своего оруженосца:

•	•	•		А	Б	В
•	•	•		а	б	в

47. Четыре рыцаря со своими оруженосцами не смогут переправиться с первого берега на второй, соблюдая условия задачи. Чтобы объяснить это, предположим, что переправа возможна, и перенумеруем, начиная с первого, все рейсы, которые совершит лодка. Тогда после нечетных рейсов она будет находиться на втором берегу, а после четных — на первом. Обозначим через $2k + 1$ наименьший номер нечетного рейса, в результате которого на втором берегу окажется более двух рыцарей. Рейс с номером $2k + 1$ может доставить на второй берег не более двух человек, поэтому после рейса $2k - 1$ на втором берегу должен находиться по крайней мере один рыцарь. Мы видим, что после рейса $2k - 1$ на втором берегу могут находиться или один, или два рыцаря.

В первом случае обозначим рыцарей, оставшихся на первом берегу, через А, В, С, а рыцаря на втором берегу — через D. Если соответствующих оруженосцев обозначить a, b, c, d , то с соблюдением условий задачи возможно единственное распределение оруженосцев. Итак, в первом случае после рейса с номером $2k - 1$ мы получим такую картину:

Первый берег		Второй берег	
A	B	C	D
a	b	c	d

Кто же отправится в лодке рейсом $2k$? Рыцарь D уплыть им не может, ведь тогда после рейса $2k + 1$ на втором берегу будет не более двух рыцарей. Значит, рейсом $2k$ поплывет один оруженосец d , но тогда на первом берегу он окажется в обществе чужих рыцарей, что противоречит условию задачи. В рейс $2k$ плыть некому. Это означает, что первый случай невозможен.

Во втором случае обозначим рыцарей на первом берегу через A, B и переправившихся рыцарей через C, D . Тогда после рейса $2k - 1$ имеем:

Первый берег		Второй берег	
A	B	C	D
a	b	c	d

Кто же в этом случае отправится рейсом $2k$? Ни один из рыцарей C, D уплыть не может, так как тогда рейсом $2k + 1$ с первого берега должны плыть два рыцаря и один из оруженосцев a или b остается без охраны. Но ни один из оруженосцев c, d не может плыть рейсом $2k$ без своего рыцаря, ведь на первом берегу находятся A, B . Опять в рейс $2k$ плыть некому.

Итак мы установили, что с соблюдением условия задачи на второй берег не может переправиться более двух рыцарей.

48. Обозначим рыцарей буквами $A, B, В, Г$, а их оруженосцев $a, б, в, г$ соответственно.

Первый берег				Второй берег			
A	B	$В$	$Г$	•	•	•	•
a	$б$	$в$	$г$	•	•	•	•

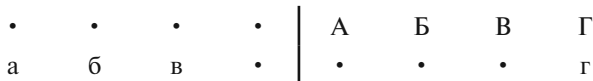
I. Переправляются оруженосцы $б, в, г$:

A				•			
B				•			
$В$				•			
$Г$				•			
a	•	•	•	•	$б$	$в$	$г$

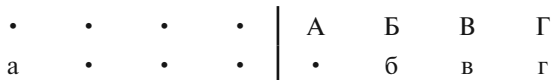
II. Оруженосец $б$ возвращается, а рыцари $В, Г$ переправляются на другую сторону:

A		B		•		•	
a		$б$		•		•	
•				•			
•				•			
$В$				$Г$			
$Г$				$В$			
$в$				$б$			
$г$				$г$			

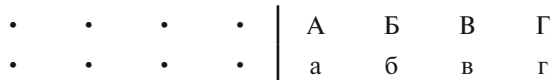
III. Рыцарь В и его оруженосец переезжают назад. Затем рыцари А, Б, В переправляются на второй берег:



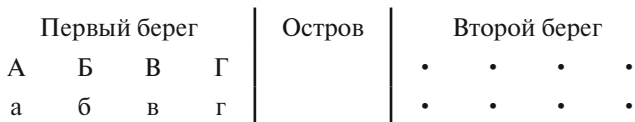
IV. Оруженосец г забирает оруженосцев б, в:



V. Один из оруженосцев перевозит последнего оруженосца а:



49. Будем пользоваться обозначениями предыдущих задач:



I. Рыцарь Г перевозит своего оруженосца на остров и возвращается назад:



II. Рыцарь В перевозит своего оруженосца на второй берег и возвращается назад:



III. Рыцарь В перевозит на остров рыцаря Г, заезжает за своим оруженосцем и возвращается с ним на первый берег:



IV. Рыцари А, Б, В и их оруженосцы переправляются, не заезжая на остров (см. задачу 45):



V. Рыцарь А со своим оруженосцем переезжает на остров, оставляет там оруженосца и перевозит на второй берег рыцаря Г:

•	•	•	•			А	Б	В	Г
•	•	•	•	а, г		•	б	в	•

VI. Оруженосец в перевозит сначала а, затем г:

•	•	•	•			А	Б	В	Г
•	•	•	•			а	б	в	г

50. Железнодорожный путь у станции имеет такой вид, как показано на рис. 128.

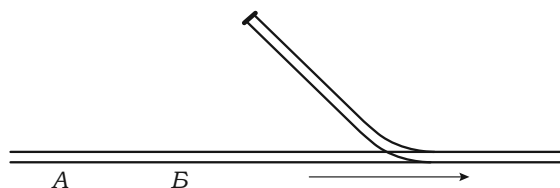


Рис. 128

По главному пути в направлении, обозначенном стрелкой, идут впереди поезд Б, а за ним поезд А, который надо пропустить вперед, пользуясь боковой веткой, где может поместиться лишь часть вагонов.

Поезд А нагнал поезд Б и должен пройти дальше. Как же быть? А вот как.

Поезд Б идет по главному пути и переходит весь за начало боковой ветки. Затем поезд Б идет задним ходом на это ответвление и оставляет там столько вагонов, сколько умещается, а оставшая часть поезда Б вместе с паровозом уходит опять вперед, в начало ветки. Затем пропускают поезд А и, как только он весь пройдет на начало ветки, к последнему его вагону прицепляют оставшиеся на ветке вагоны поезда Б, и поезд А сводит эту часть поезда Б с ветки вперед. Затем поезд А пускают назад, влево от начала ветки, и оставляют там вагоны от поезда Б. В это время другая часть поезда Б (с паровозом) идет задним ходом и становится на ветку, открывая свободный путь для поезда А. Он мчится дальше, а паровоз поезда Б с несколькими передними вагонами опять выходит на главный путь, прицепляет стоящую влево от начала ветки часть своего поезда и следует за поездом А.

51. Положение судов и канал с заливом изображены на рис. 129.

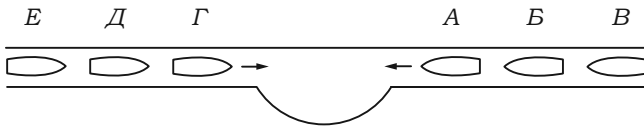


Рис. 129

Пароходы Б и В отходят назад (вправо), А входит в залив; Г, Д и Е проходят по каналу мимо А; тогда А выходит из залива и идет своей дорогой (влево). Е, Д и Г отступают на прежнее место (налево); тогда с Б повторяется все, что делалось с А. Таким же образом проходит и В, и пароходы плывут своей дорогой.

V. ДЕЛЕЖИ ПРИ ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫХ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАХ

52. Если мы из 5 данных пряников 3 разрежем пополам, то получим 6 равных кусков, каждый из которых и отдадим мальчикам. Затем 2 оставшихся пряника разрежем каждый на 3 равных части и получим опять 6 равных кусков, которые и отдадим мальчикам. Таким образом, задача решена, причем ни одного пряника не пришлось разрезать на 6 частей.

53. И Никита и Павел делают неправильный расчет. 11 лепешек разделены на троих поровну, значит, каждый съел $\frac{11}{3}$ лепешки.

У Павла было 7 лепешек, он съел $\frac{11}{3}$ лепешки, следовательно, охотнику отдал $\frac{10}{3}$ лепешки ($7 - \frac{11}{3}$).

Никита из четырех своих лепешек съел тоже $\frac{11}{3}$ лепешки, следовательно, охотнику отдал $\frac{1}{3}$ (одну треть) лепешки ($4 - \frac{11}{3}$).

Охотник съел $\frac{11}{3}$ лепешки и заплатил за них 11 копеек, значит, за каждую треть лепешки он дал по копейке. У Павла он взял 10 третей, у Никиты — одну треть; следовательно, Павел должен взять себе гривенник, а Никита — копейку.

54. Иван предложил крестьянам делить зерно так:

— Я рассыпаю зерно на три кучи на мой взгляд поровну, и отхожу в сторону. Мне подойдет любая из куч. Пусть затем Петр укажет наименьшую по его мнению кучу зерна. Если Николай также посчитает, что зерна в этой куче меньше трети, то отдайте ее мне, а остаток зерна делите между собой известным уже способом. Если же Николай решит, что в указанной куче не меньше трети зерна, пусть возьмет ее себе. Петр возьмет наибольшую по его мнению кучу, а оставшаяся достанется мне. Крестьяне последовали предложению Ивана, разделили зерно и довольные разошлись.

55. Предполагается, конечно, что все бочонки — полные, полные наполовину и пустые — равны между собою. Ясно, что каждый должен получить по семи бочонков. Подсчитаем теперь, сколько же вина должно прийти на долю каждого. Есть 7 бочонков полных и семь пустых. Если бы можно было от каждого полного бочонка отлить половину в пустой, то получилось бы 14 наполовину полных бочонков; прибавляя к ним еще 7 имеющихся наполовину полных, мы получили бы всего 21 полный наполовину бочонок. Значит, на долю каждого должно прийти

по 7 наполовину полных бочонков вина. Сообразив это, получаем, что, не переливая вина, можно поделить все поровну так:

	Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
1-й человек	2	3	2
2-й человек	2	3	2
3-й человек	3	1	3

А вот и другое решение:

	Полные бочонки	Полные наполовину бочонки	Пустые бочонки
1-й человек	3	1	3
2-й человек	3	1	3
3-й человек	1	5	1

56. Задача эта имеет два решения, и решения эти состоят, очевидно, в том, что из полного восьмиведерного бочонка нужно отливать вино в пустые бочонки, из этих последних переливать опять и т. д.

Дадим эти решения в виде двух таблиц, которые показывают, сколько в каждом бочонке остается вина после каждого переливания.

Решение 1

	8-ведерн.	Бочонки 5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания	8	0	0
После 1-го пер.	3	5	0
После 2-го пер.	3	2	3
После 3-го пер.	6	2	0
После 4-го пер.	6	0	2
После 5-го пер.	1	5	2
После 6-го пер.	1	4	3
После 7-го пер.	4	4	0

Решение 2

	8-ведерн.	Бочонки 5-ведерн.	3-ведерн.
До переливания	8	0	0
После 1-го пер.	5	0	3
После 2-го пер.	5	3	0
После 3-го пер.	2	3	3
После 4-го пер.	2	5	1

	8-ведерн.	Бочонки 5-ведерн.	3-ведерн.
После 5-го пер.	7	0	1
После 6-го пер.	7	1	0
После 7-го пер.	4	1	3
После 8-го пер.	4	4	0

57. Решение 1

16-ведерн.	11-ведерн.	6-ведерн.
16	0	0
10	0	6
0	10	6
6	10	0
6	4	6
12	4	0
12	0	4
1	11	4
1	9	6
7	9	0
7	3	6
13	3	0
13	0	3
2	11	3
2	8	6
8	8	0

Решение 2

16-ведерн.	11-ведерн.	6-ведерн.
16	0	0
10	0	6
10	6	0
4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6
8	8	0

58. Решение 1

6-ведерн.	3-ведерн.	7-ведерн.
4	0	6
1	3	6
1	2	7

6-ведерн.	3-ведерн.	7-ведерн.
6	2	2
5	3	2
5	0	5

Решение 2

6-ведерн.	3-ведерн.	7-ведерн.
4	0	6
4	3	3
6	1	3
2	1	7
2	3	5
5	0	5

Легко сформулировать множество подобных задач. Но выписанные таблицы не дают ответа на вопрос: каким же правилом руководствоваться для нахождения решения? С целью найти такое правило давайте представим себе задачу иначе — геометрически. Для определенности рассмотрим задачу 58. Обозначим через x и y количество жидкости, содержащейся после какого-либо переливания соответственно в первом и втором бочонках. При переливаниях общее количество жидкости не изменяется, т. е. все время остается равным $4 + 6 = 10$ ведрам. Поэтому в третьем бочонке будет находиться $10 - x - y$ ведер жидкости. Количество жидкости, содержащейся в бочонке, не может быть больше объема бочонка. Мы видим, что числа x, y удовлетворяют таким условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 6, \\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0 \leq 10 - x - y \leq 7, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 6, \\ 0 \leq x \leq 3, \\ 3 \leq x + y \leq 10. \end{array} \right.$$

Для дальнейшего удобно воспользоваться листом клетчатой бумаги. Возьмем такой лист, выберем на нем некоторую точку и проведем через нее две перпендикулярные прямые по линиям нанесенной на бумаге решетки. Одну назовем осью X , другую — осью Y . Каждой паре чисел x, y мы сможем тогда поставить в соответствие некоторую точку на листе бумаги — точку с координатами x, y . Нарисуем на плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют написанным выше неравенствам. На рис. 130 это множество — внутренняя часть четырех угольника $PQRS$ — заштриховано. Начальному распределению жидкости соответствует на этом рисунке точка $A (x = 4, y = 0)$. Распределению, которое мы хотим получить, — точка $B (x = 5, y = 0)$, при этом в третьем бочонке будет 5 ведер).

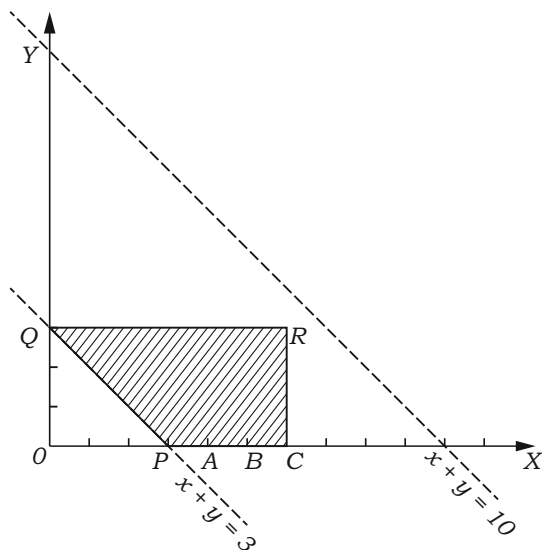


Рис. 130

Последовательность переливаний, ведущая от распределения А к распределению В, представится на этом рисунке в виде некоторой последовательности точек. Или, если мы соединим отрезком прямой линии каждые две последовательные точки, — в виде ломаной с началом в точке А и концом в точке В.

Попробуем выяснить, каким же условиям должны удовлетворять вершины этой ломаной и ее звенья.

Переливание заканчивается, когда наполнится тот бочонок, в который мы льем жидкость, или станет пустым 48 бочонок, из которого мы жидкость выливаем. Это означает, что после каждого переливания обязательно найдется хотя бы один пустой или хотя бы один полный бочонок. Где же на четырехугольнике $PQRS$ будут располагаться соответствующие точки? Если полон первый бочонок ($x = 6$), то точка лежит на отрезке RS ; если первый бочонок пуст ($x = 0$), то должны быть полными второй и третий бочонки ($3 + 7 = 10$). Имеется единственная точка с такими условиями — точка Q . Распределениям, при которых пуст второй бочонок ($y = 0$), соответствуют точки отрезка PS , а если второй бочонок полон ($y = 3$) — точки отрезка QR . Наконец, третий бочонок пустым быть не может, в первые два бочонка 10 ведер не вместятся, а если он полон, то в первых двух должно содержаться $10 - 7 = 3$ ведра ($x + y = 3$). Соответствующие точки лежат на отрезке PQ . В любом случае точки лежат на границе четырехугольника $PQRS$. Итак, мы установили, что вершины нашей ломаной должны располагаться на границе четырехугольника $PQRS$.

Заметим теперь, что при каждом переливании содержимое одного бочонка остается неизменным, ведь каждое переливание затрагивает только два бочонка. Если не изменяется содержимое первого бочонка (x постоянно), то отрезок, соединяющий точки, соответствующие распределениям до и после переливания, параллелен оси Y (у начала и конца отрезка координата x имеет одно и то же значение). Если при переливании не меняется содержимое второго бочонка, то соответствующее звено ломаной параллельно оси X (y постоянно). Наконец, если в переливании не участвует третий бочонок, то сохраняется общее количество жидкости в первых двух бочонках. Иными словами, в концах отрезка сумма $x + y$ принимает одно и то же значение. Это означает, что звено ломаной параллельно отрезку PQ . Итак, каждое звено ломаной перпендикулярно оси OX , или оси OY , или биссектрисе угла между этими осями.

Чтобы проверить себя, представим, что некоторое звено ломаной расположено на границе многоугольника $PQRS$, например на отрезке PQ . Что это означает? Звено образует равные углы с осями X , Y , поэтому в переливании не участвует третий бочонок. Кроме того, этот бочонок полон. В первых двух бочонках вместе содержится $x + y = 3$ ведра жидкости, так что переливание закончится, если станет пустым первый бочонок ($x = 0$, точка Q) или второй бочонок ($y = 0$, точка P). Точно так же можно рассуждать и для других сторон многоугольника $PQRS$. Мы выяснили, что если некоторое звено ломаной лежит на границе $PQRS$, то его конец обязательно совпадает с одной из точек P , Q , R или S .

Наша задача на геометрическом языке выглядит теперь так: соединить точку A с точкой B ломаной, все вершины которой лежат на границе многоугольника, а звенья параллельны осям X , Y или образуют равные углы с осями. При этом, если звено лежит на стороне многоугольника, то его конец должен совпадать с одной из вершин.

В таком виде задача становится нагляднее, и требуемые ломаные без труда находятся (рис. 131, 132).

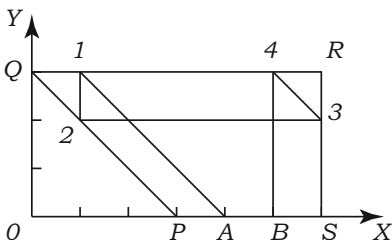


Рис. 131

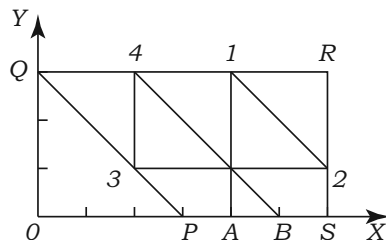


Рис. 132

На клетчатой бумаге проведение ломаных не составляет никакого труда, так как все звенья проходят через узлы решетки, а вершины совпадают с узлами. Ломаные, представленные на рис. 131, 132, соответствуют первому и второму решениям, в чем легко убедиться.

В других задачах роль четырехугольника $PQRS$ могут играть другие многоугольники: параллелограмм (задача 56), пятиугольник (задача 57). Могут встретиться шестиугольники, причем 6 — это максимальное возможное число сторон. Формулировка задачи при этом остается той же самой, изменятся многоугольник и положения точек A, B .

Геометрическое представление задачи и ее решения наглядно, однако выполнение всех построений отнимает лишнее время, требует бумаги и карандаша. Попробуем на основе геометрических соображений дать рекомендации, как в любой подобной задаче найти требуемый способ (если он существует), не прибегая к построениям.

Вершины многоугольника соответствуют распределениям жидкости, при которых сразу два бочонка находятся в граничном состоянии (оба пусты; оба полны; один пуст, другой полон).

I. Прежде всего нужно добиться с помощью переливаний, чтобы по крайней мере два бочонка находились в граничном состоянии.

Геометрически это соответствует тому, что мы строим ломаную, начинающуюся в точке A и кончающуюся в какой-либо вершине многоугольника.

II. Следует обойти все вершины многоугольника, переливая на каждом шаге жидкость из бочонка, который не участвовал в предыдущем переливании, и не изменяя содержимого одного из бочонков, находящихся в граничном состоянии.

Геометрически последовательное применение правила *II* означает переход от вершины многоугольника к соседней с ним вершине и так далее. Вершин не более шести, поэтому, применив правило *II* не более шести раз, мы вернемся к распределению, которое нам ранее уже встречалось.

Если, применяя *I*, мы не попали в B и если B отлично от вершин многоугольника (применение *II* не дает нам B), то далее нужно поступать следующим образом.

III. Отправляясь от точки A , а также от распределений, соответствующих каждой вершине многоугольника, совершать переливания, не приводящие к ранее встречавшимся распределениям, пока это будет возможно сделать или встретится распределение B . При этом, как легко видеть, в переливании должны участвовать бочонок, находящийся в граничном состоянии, и бочонок, не участвовавший в предыдущем переливании.

Из геометрических соображений следует, что если это можно сделать, то единственным способом (из точки A иногда можно провести две ломаные, как в рассмотренной задаче). Если применение правила *III* не приведет к распределению B , то, значит, переливаниями из A в B перейти невозможно.

VI. СКАЗКИ И СТАРИННЫЕ ИСТОРИИ

60. Задача разрешается очень легко, если только решение ее начать с конца, приняв во внимание, что после третьего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., которые он должен был отдать.

В самом деле, если после последнего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значит, перед этим переходом у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились после того, как он отдал 24 коп., значит, всего денег у него было 36 коп. Следовательно, второй переход он начал с 18 коп., а эти 18 коп. получились у него после того, как он в первый раз перешел мост и отдал 24 коп. Значит, всего после первого перехода у него было денег 18 да 24 коп., т. е. 42 коп. Отсюда ясно, что перед тем, как первый раз вступить на мост, крестьянин имел в кармане 21 коп. собственных денег.

Прогодал крестьянин! Видно, что на чужой совет всегда надо еще свой ум иметь.

61. Третий крестьянин оставил для товарищей 8 картофелин, т. е. каждому по 4 штуки. Значит, и сам он съел 4 картофелины. После этого легко сообразить, что второй крестьянин оставил своим товарищам 12 картофелин, по 6 на каждого, значит, и сам съел 6 штук. Отсюда следует, что первый крестьянин оставил товарищам 18 картофелин, по 9 штук на каждого, значит, и сам съел 9 штук.

Итак, хозяйка подала на стол 27 картофелин, и на долю каждого по этому приходилось по 9 картофелин. Но первый крестьянин всю свою долю съел. Следовательно, из восьми оставшихся картофелин придется на долю второго 3, а на долю третьего 5 штук.

62. Задача старинная и многим известная.

Ясно, что овец больше у первого пастуха, у Ивана. Но на сколько у него больше, чем у Петра?

Если Иван отдаст одну овцу не Петру, а кому-либо другому, то станет ли у обоих пастухов овец поровну? Нет, потому что поровну у них было бы только в том случае, если бы эту овцу получил Петр. Значит, если Иван отдаст одну овцу не Петру, а третьему лицу, то у него все-таки будет больше овец, чем у Петра, но на сколько больше? Ясно, что на одну овцу, потому что если прибавить теперь к стаду Петра одну овцу, то у обоих станет поровну. Отсюда следует, что пока Иван не отдаст никому ни одной своей овцы, то у него в стаде на две овцы больше, чем у Петра.

Теперь примемся за второго пастуха, за Петра.

У него, как мы нашли, на две овцы меньше, чем у Ивана. Значит, если Петр отдаст, скажем, одну свою овцу не Ивану, а кому-либо иному, то

тогда у Ивана будет на три овцы больше, чем у Петра. Но пусть эту овцу получит именно Иван, а не третье лицо. Ясно, что тогда у него будет на четыре овцы больше, чем осталось у Петра.

Но задача говорит, что у Ивана в этом случае будет ровно *вдвое* больше овец, чем у Петра. Стало быть, *четыре* и есть именно то число овец, которое останется у Петра, если он отдаст одну овцу Ивану, у которого получится *восемь* овец. А до предполагаемой отдачи, значит, у Ивана было 7, а у Петра 5 овец.

63. Недоумение крестьянок разрешается очень быстро, если сообразим, что, сложив свои яблоки вместе и начав их продавать сообща, они, сами того не замечая, продавали их уже по другой цене, чем раньше.

Возьмем, для примера, двух последних крестьянок и рассмотрим, что они, в сущности, сделали.

Пока первая и вторая думали продавать свои яблоки отдельно, цена одного яблока у первой была полкопейки, а у второй — треть копейки. Когда же они сложились и начали продавать каждые пять яблок по 2 коп., то цена каждого яблока стала уже $\frac{2}{5}$ коп.

Значит, первая крестьянка все свои яблоки продала не по полкопейки за штуку, а по $\frac{2}{5}$ коп. и на каждом яблоке теряла по $\frac{1}{10}$ коп.:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10} \right),$$

а на всех тридцати яблоках она потеряла 3 коп.

Вторая же крестьянка, наоборот, вошедши в компанию, выигрывала на каждом яблоке по $\frac{1}{15}$ коп.:

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15} \right),$$

а на всех тридцати яблоках выиграла, значит, 2 коп.

Первая потеряла 3 коп., а вторая выиграла только 2 коп. В общем, все-таки копейка потеряна.

Путем подобных же рассуждений легко узнать, почему у первых двух крестьянок оказалась «лишняя» копейка.

64. Крестьяне не умели правильно складывать дроби. В самом деле, сложите все части, на которые крестьяне хотели поделить находку:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}.$$

Значит, они все вместе хотели получить меньше, чем нашли (нашли они $\frac{60}{60}$). Найденные деньги вместе с деньгами верхового были разделены на 60 частей; из них $\frac{57}{60}$ отданы крестьянам, а $\frac{3}{60}$, или $\frac{1}{20}$, остались у верхового. Но мы знаем, что у верхового осталось 3 руб. Значит, $\frac{1}{20}$ всех денег составляют 3 рубля; следовательно, всех денег было $3 \times 20 = 60$ руб. Карп получил из этих денег $\frac{1}{4}$ часть, т. е. 15 руб.; но, если бы верховой не приложил своих денег, Карп должен был бы получить на 25 коп. меньше, т. е. 15 руб. – 25 коп. = 14 руб. 75 коп.: такова $\frac{1}{4}$ часть найденных денег. Отсюда заключаем, что найдено было 14 руб. 75 коп. $\times 4 = 59$ руб. С деньгами верхового стало 60 руб.; значит, верховой действительно приложил 1 рубль. Приложил он рубль, а увез 3 рубля: 2 рубля выгадал себе за умный дележ.

Какие же деньги были найдены в кошельке?

Пять бумажек по 10 руб., одна в 5, одна в 3 и одна в 1 рубль. Сидору верховой дал 20 руб.: две десятирублевки; Карпу — 15 руб.: десятирублевку и пятирублевку; Пахому — 12 руб.: десятирублевку и две рублевки (одну — найденную, другую — свою); Фоке — последнюю десятирублевку, а трехрублевку взял себе.

65. Мудрец пустился на уловку. Он прибавил к стаду на время своего верблюда, тогда их стало 18. Разделив это число, как сказано в завещании (старший брат получил $18 \times \frac{1}{2} = 9$ верблюдов, средний $18 \times \frac{1}{3} = 6$ верблюдов, младший $18 \times \frac{1}{9} = 2$ верблюда), мудрец взял своего верблюда обратно ($9 + 6 + 2 + 1 = 18$). Секрет, как и в предыдущей задаче, заключается в том, что части, на которые по завещанию должны были делить стадо сыновья, в сумме не составляют 1. Действи-

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

66. Если вода в бочке налита ровно до половины, то, наклонив бочку так, чтобы уровень воды пришелся как раз у края бочки, мы увидим, что высшая точка дна находится также на уровне воды (рис. 133, а).

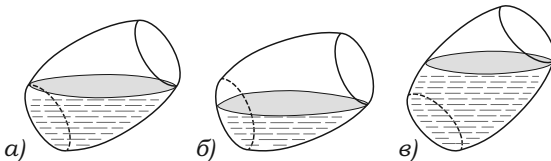


Рис. 133

Это случится потому, что плоскость, проведенная через диаметрально противоположные точки верхней и нижней окружностей бочки, делит ее на две равные части. Если вода налита менее чем до половины, то при таком же наклонении бочки из воды должна выступить часть

дна (рис. 133, б). Наконец, если воды в бочке более половины, то при наклонении дно окажется под водой (рис. 133, в).

Рассудив именно так, работник справился с заданием.

67. Решения приведены на рис. 134 и рис. 135.

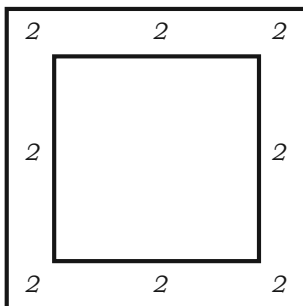


Рис. 134

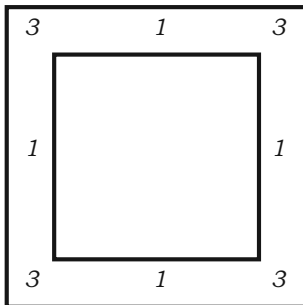


Рис. 135

68. Слуга брал себе по бутылке из каждого среднего отделения и из тех же отделений, чтобы обмануть хозяина, после каждого воровства прибавлял по бутылке в угловые отделения. Так он воровал 4 раза по 4 бутылки, а всего, значит, унес 16 бутылок. Все это видно из рис. 136. Слуга мог расставлять бутылки и другими способами. Но всегда в первом и третьем столбцах квадрата он должен был бы оставлять по 21 бутылке и потому не мог бы унести более $60 - 2 \times 21 = 18$ бутылок, т. е. совершить более четырех краж.

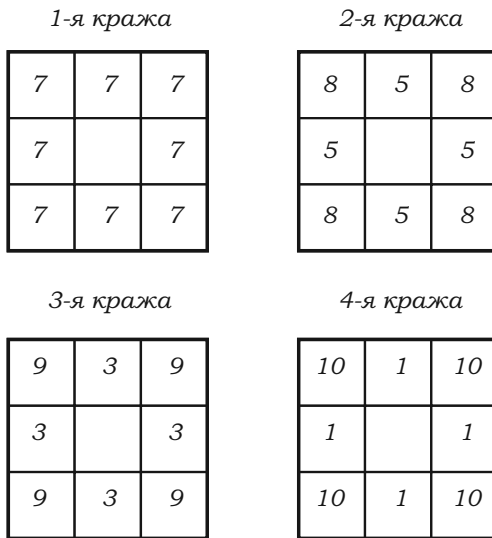


Рис. 136

69. В первом случае в пещере остался 21 человек. Рассадить их с соблюдением условия, чтобы вдоль каждой стены находилось 9 человек, можно многими способами. Один из них показан на рис. 137.

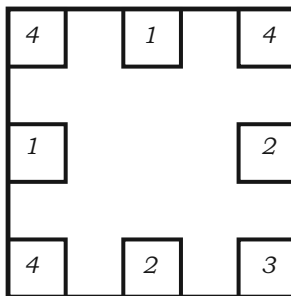


Рис. 137

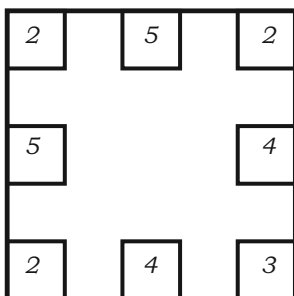


Рис. 138

Во втором случае требуется рассадить 27 человек. Одно из возможных решений представлено на рис. 138.

70. Нетрудно видеть, что третьему внуку дед дал грибов меньше всего, потому что третий внук должен был набрать еще столько же грибов, чтобы сравняться с братьями. Для простоты скажем, что третьему внуку дед дал грибов одну горсть.

Сколько же он дал таких же горстей четвертому?

Третий внук принес домой 2 горсти, потому что сам еще нашел столько же грибов, сколько дал ему дед. Четвертый внук принес домой ровно столько же грибов, сколько и третий, т. е. тоже 2 горсти; но он половину своих грибов растерял по дороге, значит, дед дал ему 4 горсти.

Первый внук принес домой 2 горсти, но из них 2 гриба он сам нашел, значит, ему дед дал 2 горсти без двух грибов. Второй внук принес домой 2 горсти, да по дороге он потерял 2 гриба; значит, дед ему дал 2 горсти да еще два гриба.

Итак, дед роздал внукам 1 горсть, да 4 горсти, да 2 горсти без двух грибов, да 2 горсти с двумя грибами, итого 9 полных горстей (в двух горстях не хватало по два гриба, зато в двух других горстях было по два лишних гриба). В 9 равных горстях было 45 грибов; значит, в каждой горсти $45 : 9 = 5$ грибов.

Третьему внуку дед дал 1 горсть, т. е. 5 грибов; четвертому — 4 горсти, т. е. $5 \times 4 = 20$ грибов; первому — 2 горсти без двух грибов, т. е. $(5 \times 2) - 2 = 8$ грибов; второму — 2 горсти с двумя грибами, т. е. $(5 \times 2) + 2 = 12$ грибов.

71. Задача, очевидно, сводится к нахождению такого числа, которое делится нацело (т. е. *без остатка*) на 7, а при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает в остатке 1.

Наименьшее число, которое делится без остатка на числа 2, 3, 4, 5 и 6 (*наименьшее кратное этих чисел*), есть 60. Нужно, значит, найти такое число, которое делилось бы на 7 нацело и было бы вместе с тем на одну единицу больше числа, делящегося на 60. Такое число тотчас можно найти путем последовательных попыток: 60, деленное на 7, дает в остатке 4, следовательно, 2×60 дает в остатке единицу ($2 \times 4 = 8; 8 - 7 = 1$). Значит,

$$2 \times 60 = \text{числу, кратному } 7 + 1,$$

откуда следует, что

$$(7 \times 60 - 2 \times 60) + 1 = \text{числу, кратному } 7,$$

т. е.

$$5 \times 60 + 1 = \text{числу, кратному } 7,$$

$$5 \times 60 + 1 = 301.$$

Итак, наименьшее число, решающее задачу, есть 301. То есть *наименьшее число яиц, которое могло быть в корзине у женщины, есть 301*.

72. Вопрос, очевидно, сводится к тому, чтобы знать точное время при возвращении домой. Петр рассуждал так. Я завожу свои часы и перед уходом замечаю их показание, которое, положим, равно a . Приходя к знакомому, немедленно спрашиваю у него о времени, и пусть его часы показывают b . Перед уходом от знакомого опять замечаю время по его часам, которые на этот раз показывают c . Придя домой, я немедленно замечаю, что мои часы показывают d . По этим данным легко определить искомое показание часов. Разность $d - a$ — а покажет время моего отсутствия дома. Разность $c - b$ — время, проведенное мною у знакомого. Разность $(d - a) - (c - b)$, полученная от вычитания второго времени из первого, даст время, проведенное мною в дороге. Половина этого вре-

мени $\frac{b + d - a - c}{2}$ употреблена мною на обратную дорогу. Прибавим эту

половину к c , получим $\frac{b + c + d - a}{2}$; это и будет точное показание часов при моем возвращении домой.

73. По условию вся вырученная сумма, очевидно, не превышает 9997 руб. 28 коп. Значит, число проданных кусков не более $999728 : 4936$, т. е. не более 202 кусков.

Последняя цифра неизвестного числа кусков должна быть такова, чтобы она, будучи умножена на 6, давала произведение, оканчивающееся на 8; такая цифра может быть 3 или 8.

Положим, что последняя цифра неизвестного числа кусков равна 3. Стоимость трех кусков равна 14808 коп. Вычитая это число из вырученной суммы, мы должны получить число, оканчивающееся на 920.

Если предположить, что последняя цифра равна 3, то вторая от конца цифра может быть или 2, или 7, так как только эти цифры, будучи умножены на 6, дают произведения, оканчивающиеся на 2.

Положим, что неизвестное число оканчивается на 23. Вычитая стоимость 23 кусков из всей вырученной суммы, получим число, оканчивающееся на 200. Третья цифра может быть или 2, или 7; но так как неизвестное число не превосходит 202, то наше предположение неверно.

Если бы мы предположили, что неизвестное число оканчивается на 73, то третья цифра была бы равна 4 или 9; такое предположение тоже неверно.

Итак, последняя цифра не может быть 3; остается предположить, что она равна 8. Рассуждения, подобные предыдущим, покажут нам, что вторая цифра может быть или 4, или 9; из этих двух предположений верным может быть только второе.

Задача имеет одно решение: число проданных кусков равно 98, вся вырученная сумма равна 4837 руб. 28 коп.

74. Надо начинать счет с 6-го солдата, сидящего по левую руку от хозяина. Во втором же случае — с 5-го из солдат направо от хозяина.

75. В пылу спора кучер не смог представить, сколь велико количество запряжек, которые он должен сделать. Подсчитаем же мы это количество.

Обозначив лошадей цифрами 1, 2, 3, 4, 5, мы должны выяснить, сколькими способами можно переставить эти пять цифр.

Две цифры можно переставить двумя способами: (1, 2) и (2, 1). Перестановок из трех цифр 1, 2, 3, начинающихся с цифры 1, будет также две. Но это число не зависит от того, какая фиксированная цифра из трех стоит на первом месте. Значит, всего перестановок из трех цифр будет $3 \times 2 = 6$:

123 213 312 132 231 321

Продолжая далее, мы находим, что перестановок из четырех цифр с фиксированной первой цифрой будет 6 и множество всех перестановок из 4 цифр распадается 77 на 4 группы по 6 перестановок, начинающихся с одной и той же цифры — 1, 2, 3 или 4. Так что всех перестановок будет $4 \times 6 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Аналогично, множество всех перестановок из 5 цифр состоит из 5 групп по 24 перестановки, начинающихся с одной цифры — 1, 2, 3, 4 или 5. Всего их будет $5 \times 24 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Можно доказать, что множество перестановок из n цифр $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ равняется произведению $1 \times 2 \times 3 \dots \times n$. Это число обозначается $n!$.

Вернемся к нашей задаче. Итак, кучеру предстояло сделать 120 перепряжек. Если он на каждую затратит только минуту времени, то на все ему понадобится 2 часа. Кучер проспорил.

75. Если один из мужчин купил, скажем, x предметов, то по условию он заплатил за них x^2 копеек. Если его жена купила y предметов, то она заплатила за них y^2 копеек. Значит, имеем $x^2 - y^2 = 48$, или $(x - y) \times (x + y) = 48$.

Числа x, y по условию целые и положительные. Это возможно только в том случае, когда $x - y$ и $x + y$ четны и $x + y > x - y$. Разлагая 48 на сомножители, видим, что имеется только три удовлетворяющие этому условию возможности: $48 = 2 \times 24 = 4 \times 12 = 6 \times 8$, или

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 2, \\ x_1 + y_1 = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 - y_2 = 4, \\ x_2 + y_2 = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 - y_3 = 6, \\ x_3 + y_3 = 8. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, находим $x_1 = 13, y_1 = 11, x_2 = 8, y_2 = 4, x_3 = 7, y_3 = 1$.

Отыскивая те значения x и y , разность которых равна 9, находим, что Иван купил 13 предметов, Екатерина — 4 предмета. Точно так же Петр купил 8 предметов, Мария — 1 предмет. Таким образом, имеем следующие пары:

$$\begin{cases} \text{Иван} & 13, \\ \text{Анна} & 11, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Петр} & 8, \\ \text{Екатерина} & 4, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Алексей} & 7, \\ \text{Мария} & 1. \end{cases}$$

ВИ. УПРАЖНЕНИЯ С КУСКОМ БУМАГИ

77. Положите кусок бумаги неправильной формы на стол и сделайте сгиб близ края. Пусть полученный при этом сгиб будет XX' (рис. 139). Это прямая линия. Проведите ножом по сгибу и отделите меньшую часть куска. Таким образом вы получите прямолинейный край. Подобно предыдущему, согните бумагу по линии DY так, чтобы прямолинейный край XX' накладывался аккуратно сам на себя. Развернув затем бумагу, вы убедитесь, что сгиб DY идет *под прямым углом* к краю XX' , так как наложение показывает, что угол YDX' равен углу YDX . Как раньше, проведите ножом по второй складке и удалите ненужную часть.

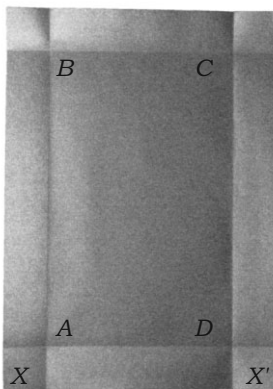


Рис. 139

Повторяя указанный прием, вы получите края CB и BA . Наложение докажет, что углы при A , B , C и D равны друг другу и прямые и что стороны BC и CD соответственно равны DA и AB . Итак, полученный кусок бумаги $ABCD$ (рис. 139) имеет форму прямоугольника. Наложение доказывает следующие его свойства:

- 1) четыре его угла все прямые;
- 2) четыре же стороны не все равны;
- 3) но две более длинные стороны равны между собой, а две более короткие — между собой.

78. Взяв прямоугольный кусок бумаги $A'D'SB$, складываем его наискось так, чтобы одна из коротких сторон, например CB , легла на длинную BA' , как это показано на рис. 140.

Угол B поместится на краю BA' в точке A , конец перегиба по краю CD' получится в точке D . Сделаем затем перегиб через точки A и D , отогнув

по прямой AD часть $A'D'DA$, которая выдается. Развернув после этого лист, найдем фигуру $ABCD$, которая и есть квадрат. В нем все четыре угла прямые и все стороны равны.

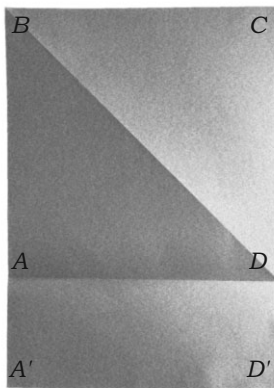


Рис. 140

79. Возьмем квадратный кусок бумаги и сложим его вдвое так, чтобы противоположные края его совпали (рис. 141).

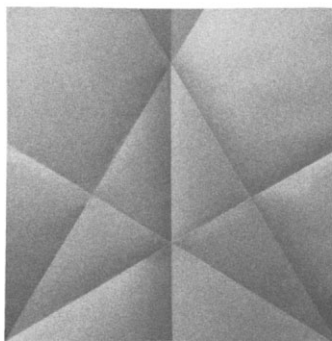


Рис. 141

Получается сгиб, проходящий через середины двух других сторон и перпендикулярный к ним. На этой *средней линии квадрата* берем какую-нибудь точку и делаем такие сгибы, которые проходят через эту точку и через углы квадрата, лежащие по обе стороны средней линии. Таким образом получаем *равнобедренный треугольник*, в основании которого лежит сторона квадрата. Средняя линия делит, очевидно, равнобедренный треугольник на два совпадающих при наложении и прямоу-

гольных треугольника. Она же делит угол при *вершине* равнобедренного треугольника пополам.

80. Возьмем на средней линии квадрата такую точку, чтобы расстояния ее от двух вершин квадрата были равны его стороне, и сделаем сгибы, как выше. В таком случае получим равносторонний треугольник (рис. 142).

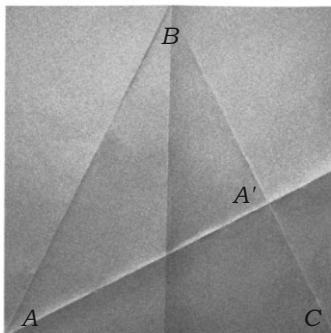


Рис. 142

Требуемую точку на средней линии квадрата найти легко. Для этого надо над AA' (рис. 142) поворачивать основание AC около одного из его концов, A , пока другой его конец, C , не упадет на среднюю линию в B .

81. Перегибаем квадрат через середины противоположных сторон (рис. 143). Получаем линии AOB и COD . На сгибах AO и OB строим известным нам уже способом равносторонние треугольники AOE , AON , BOF , BOG .

Делаем сгибы EF и NG .

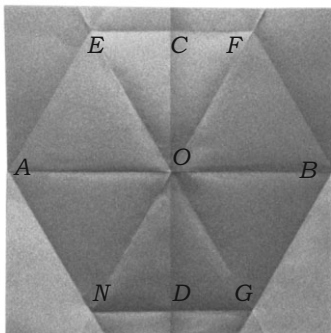


Рис. 143

Многоугольник $AECFBGDN$ и будет правильным шестиугольником, в чем каждый без труда убедится сам. Наибольшее расстояние между точками многоугольника есть, очевидно, AB .

82. Возьмем квадрат и известным уже нам способом посредством сгибов впишем в него другой квадрат (рис. 144). Разделим пополам углы между сторонами данного и вписанного квадратов. Пусть сгибы, делящие эти углы пополам, пересекаются в точках E, F, G и H .

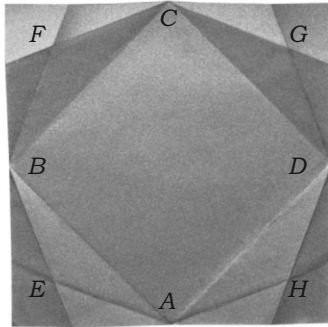


Рис. 144

Полученный многоугольник $AEBFCGDH$ и есть искомый правильный восьмиугольник. Действительно, треугольники ABE, BEC, CGD и DHA в нем равнобедренные и при наложении совпадают. Значит, стороны полученного восьмиугольника равны.

Углы многоугольника $AEBFCGDH$ тоже равны. В самом деле, каждый из углов при вершинах E, F, G, H тех же треугольников равен полтора раза взятому прямому углу, так как углы при основании этих треугольников равны четверти прямого угла. Отсюда ясно, что и углы восьмиугольника при точках A, B, C и D также равны полтора раза взятому прямому углу каждый, т. е. все углы восьмиугольника равны между собой.

Сторона взятого квадрата a представляет наибольшее расстояние между точками восьмиугольника.

85. При решении этой задачи можно пользоваться листом картона или бумаги (лучше всего разлинованной на квадратные клетки). Как сделать требуемую вырезку, видно из рис. 145 и 146. Нетрудно видеть, что все четыре полученные из трех квадратов фигуры при наложении одной на другую совпадают.

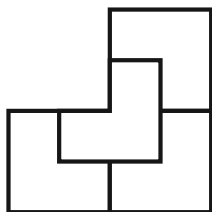


Рис. 145

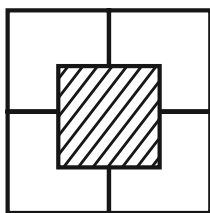


Рис. 146

86. Решение задачи видно из рис. 147, 148. Как ни проста и ни легка эта задача, но она представляет геометрическое толкование того, что $4 \times 9 = 6 \times 6$. Кроме того, подобного рода задачи прекрасно готовят к более сложным задачам о превращении одних фигур в другие посредством разрезывания их на части и перекладывания этих частей. Желающий может сам придумать еще много подобных задач.

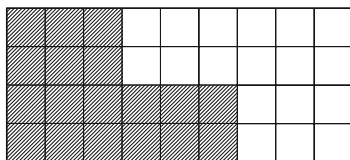


Рис. 147

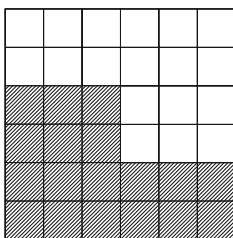


Рис. 148

87. Решение задачи видно из прилагаемого чертежа (рис. 149). Если зубчатую часть *A* вынуть из части *B* и затем снова вдвинуть ее между зубьев части *B*, передвинув на один зуб вправо, то получится безукоризненный прямоугольник и даже квадрат.

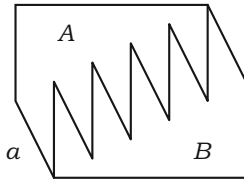


Рис. 149

88. Решение задачи приведено на рис. 150.

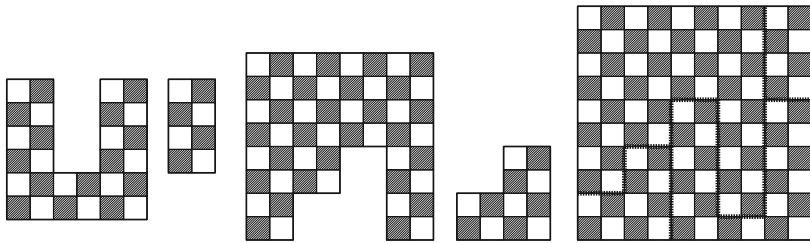


Рис. 150

89. Решение задачи приведено на рис. 151.

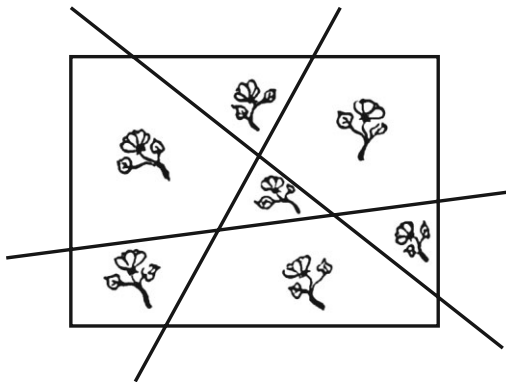


Рис. 151

90. 1) Середины сторон квадрата соединим прямыми с противоположными вершинами квадрата; 2) из середин сторон квадрата проведем линии, параллельные проведенным линиям соединения, до встреч с другими линиями соединения; 3) в полученных прямоугольниках проведем диагонали, и тогда данный квадрат будет разбит на 20 прямоугольных треугольников, как можно видеть из рис. 152.

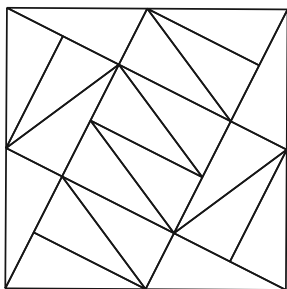


Рис. 152

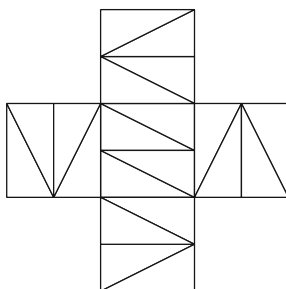


Рис. 153

Нетрудно показать также, что в полученных прямоугольных треугольниках катеты таковы, что один вдвое больше другого.

Из полученных 20 треугольников можно сложить 5 равных квадратов (рис. 153).

91. На рис. 154, 155 читатель найдет два решения этой задачи. Второе решение столь же просто, сколь и остроумно: задача решается проведением всего двух прямых линий.

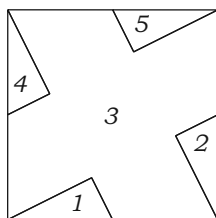
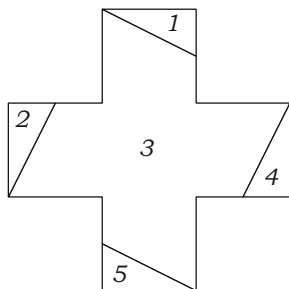


Рис. 154

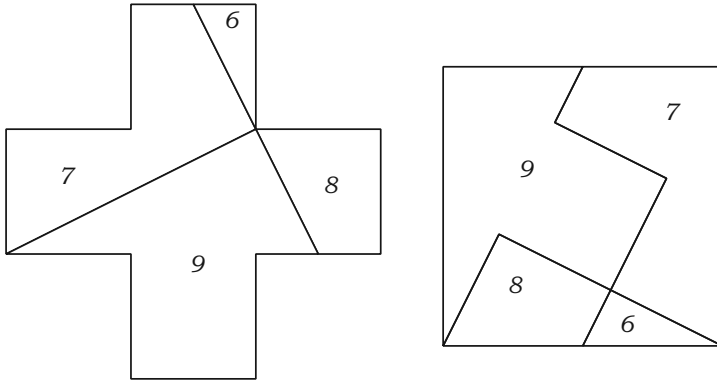


Рис. 155

92. Пусть $ABCD$ (рис. 156) — данный квадрат. Отложим на его стороне отрезок DE , равный половине диагонали этого квадрата. Соединим A с E и на полученную прямую AE опустим перпендикуляры DF и BG . Затем откладываем отрезки GH , GK , FL , все равные DF ; заканчиваем построение прямыми, параллельными или перпендикулярными DF , как показано на рис. 156. Если разрезать теперь квадрат по проведенным линиям и сложить затем все полученные части так, как указано на рис. 157, то получим три искомых квадрата.

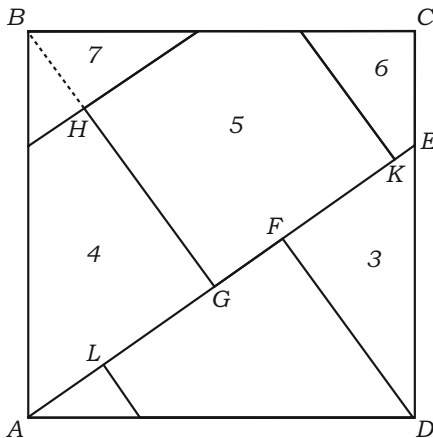


Рис. 156

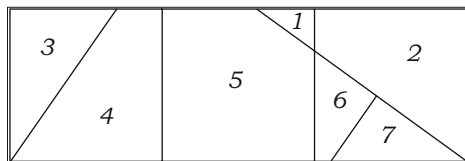


Рис. 157

Математическое доказательство этого факта предоставляем читателю, заметив только, что, пользуясь подобием треугольников и теоремой Пифагора, доказанной в одной из предыдущих задач, нетрудно вывести, что $3|DF|^2 = |AB|^2$.

93. Из прилагаемого чертежа (рис. 158) видно, как нужно разрезать квадрат. Прямые DF и GB и точка L определяются так же, как и в предыдущей задаче.

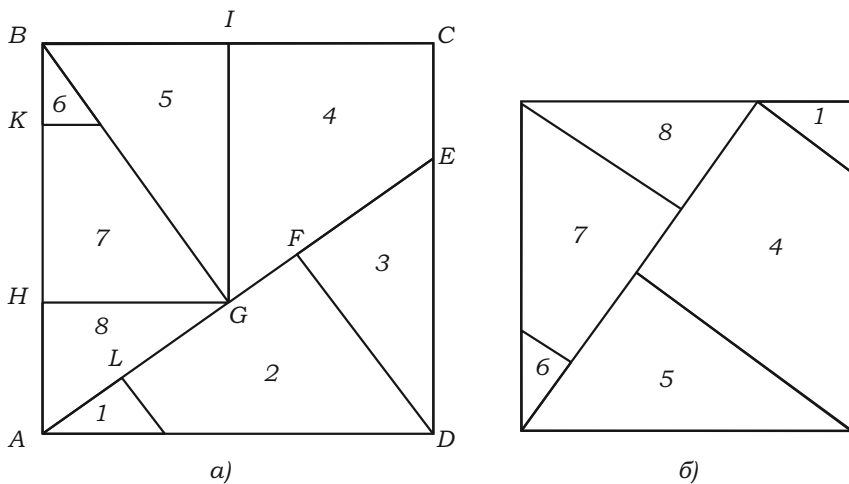


Рис. 158

Затем параллельно сторонам квадрата проводятся GH и GI (рис. 158, а) и берется $HK = GH$. Таким образом получается 8 частей, из которых и составляются требуемые квадраты. Один из них представлен на рис. 158, б, а другой есть средний на рис. 159.

94. Квадрат разрезается точно так же, как в предыдущей задаче (рис. 158). Из полученных 8 частей составляются 3 требуемых квадрата так, как на рис. 159.

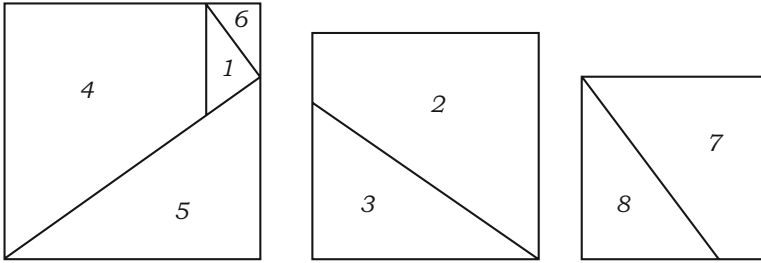


Рис. 159

По данным решениям-рисункам нетрудно доказать математически правильность этих построений, что желающий вникнуть в сущность данной задачи пусть и сделает.

95. Разрезаем шестиугольник сначала по диагонали и складываем полученные 2 половины так, чтобы они образовали параллелограмм $ABFE$ (рис. 160). Из точки A , как из центра, радиусом, равным средней пропорциональной между длиной AE и высотой параллелограмма, проводим окружность, которая пересечет BF в точке G . Затем из точки E опускаем перпендикуляр EH на продолжение AG и проводим прямую IK параллельно EH и на расстоянии от нее, равном AG .

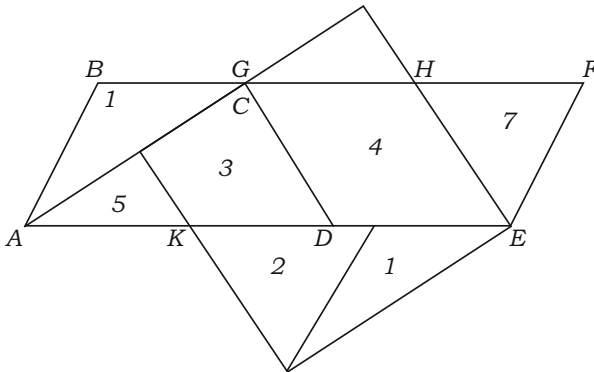


Рис. 160

Таким способом шестиугольник оказывается разрезанным на 5 таких частей, из которых можно образовать квадрат. Не разъясняем более этой задачи, так как предназначаем ее для знающих курс элементарной геометрии на плоскости.

VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ И ПАРАДОКСЫ

97. Легко видеть, что получившиеся при разрезании квадрата треугольники A и B равны между собой. Также равны и трапеции C , D . Меньшее основание трапеций и меньший катет треугольников равны 3 см и поэтому должны совпасть при совмещении треугольника A с трапецией C и треугольника B с трапецией D . В чем же секрет? Его легко обнаружить, если посмотреть на рис. 161. Дело в том, что точки G , H , E не лежат на одной прямой, $\operatorname{tg} \angle ENK = \frac{8}{3}$, а $\operatorname{tg} \angle HGJ = \frac{5}{2}$. Так как $\frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6} > 0$, то $\angle ENK > \angle HGJ$. Линия GHE является не прямой, а ломаной линией. Точно так же линия EFG — ломаная. Площадь полученного прямоугольника действительно равна 65 см^2 , но в нем имеется щель в виде параллелограмма, площадь которого в точности равна $\frac{5 \times 3}{8} = 1 \frac{1}{8} \text{ см}^2$. Наибольшая ширина щели равна, как легко видеть, $5 - 3 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ сантиметра. Таким образом, хитрому плотнику все равно пришлось при починке замазывать небольшую щель.

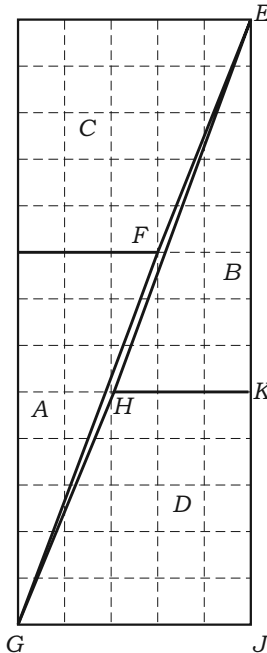


Рис. 161

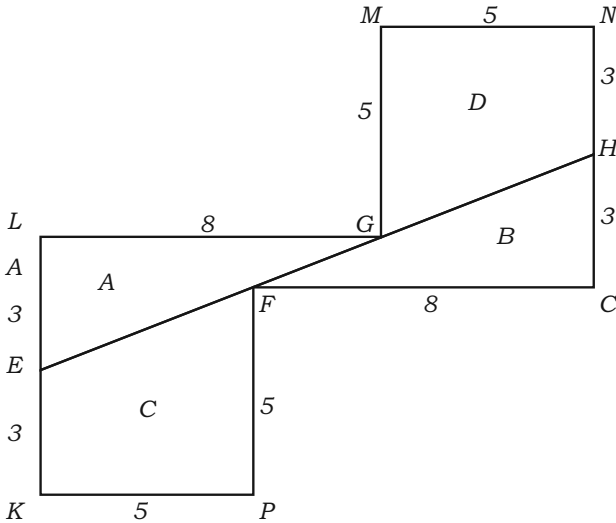


Рис. 162

Из тех же частей A, B, C, D можно сложить еще одну фигуру (рис. 162). Многоугольник $KLGMNOFP$ может быть разложен на два прямоугольника размером $5 \times 6 \text{ см}^2$ и маленький прямоугольник размером $3 \times 1 \text{ см}^2$. Следовательно, его площадь равна $2 \times 30 \text{ см}^2 + 3 \text{ см}^2 = 63 \text{ см}^2$. Но, с другой стороны, он состоит из частей A, B, C, D , суммарная площадь которых, как мы знаем, равна 64 см^2 . Разгадка этого софизма опять заключена в том, что точки E, F, G, H не лежат на прямой линии. Подробное рассмотрение этого случая мы оставляем читателю.

98. Дело в том, что маленький прямоугольный треугольник не будет равнобедренным. Один из его катетов равен 1 см , а другой, как легко сосчитать, равен $\frac{8}{7} \text{ см}$. Длина основания прямоугольника равняется $9, \frac{8}{7} \text{ см} + \frac{1}{7} \text{ см} = 9 \frac{1}{7} \text{ см}$, а его площадь $7 \text{ см} \times 9 \frac{1}{7} \text{ см} = 64 \text{ см}^2$. Противоречия не получается.

99. Более подробное рассмотрение того, как диагональ пересекает клетки прямоугольника (рис. 54), показывает, что $VRXS$ не есть квадрат. Это можно подтвердить и с помощью вычислений.

Из подобных треугольников PQR и TQX получаем $PR : QR = TX : QX$ и $PR = \frac{TX \times QR}{11} = \frac{11 \times 1}{11} = 1$. Значит, стороны прямоугольника $VRXS$ равны 12 см и $11 \frac{1}{11} \text{ см}$, а площадь равна $12 \text{ см} \times 11 \frac{1}{11} \text{ см} = 142 \frac{1}{11} \text{ см}^2$. Площадь

треугольника STU равна площади треугольника PQR и равна $\frac{1}{2} \times 1 \text{ см} \times \frac{11}{2} \text{ см} = 26 \text{ см}^2$. Таким образом, площадь фигуры равняется $142 \frac{11}{2} \text{ см}^2 + 2 \times 26 \text{ см}^2 = 143 \text{ см}^2$.

100. «Здравый смысл» подсказывает такой ответ: «Конечно, у апельсина образуется больший зазор, чем у Земли! Ведь в сравнении с окружностью земного шара — 40 000 км — какой-нибудь один метр есть столь ничтожная величина, что прибавка ее останется совершенно незаметной. Другое дело апельсин: по сравнению с его окружностью один метр — огромная величина, и прибавка ее к длине окружности должна быть весьма ощутима».

Однако давайте проверим наше заключение с помощью вычислений. Пусть длина окружности земного шара равна C , а апельсина c метрам.

Тогда радиус Земли $R = \frac{C}{2\pi}$ и радиус апельсина $r = \frac{c}{2\pi}$. После прибавки к обручам одного метра окружность обруча у Земли будет $C + 1$, а у

апельсина $c + 1$, радиусы же их соответственно будут $\frac{C+1}{2\pi}$ и $\frac{c+1}{2\pi}$. Если из новых радиусов вычтем прежние, то получим в обоих случаях одно и то же приращение:

$$\frac{C+1}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ для Земли,}$$

$$\frac{c+1}{2\pi} - \frac{c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ для апельсина.}$$

Итак, у Земли и у апельсина получится один и тот же зазор в $\frac{1}{2\pi}$ метра, т. е. примерно 16 см. Столь «поразительный» результат есть следствие постоянства отношения длины любой окружности к ее радиусу.

IX. УГАДЫВАНИЕ ЧИСЛА

101. «Фокуса» здесь, конечно, нет, только правильный математический расчет.

Чтобы от 5 прийти к 9, нужно считать так: 5, 6, 7, 8, 9. Значит, от 9 до 5 нужно пройти через те же числа 9, 8, 7, 6, 5, только считая их в обратном порядке. Если, указывая на 9, мы скажем «пять», затем, указывая на 8, скажем «шесть» и т. д., то, придя к задуманному числу 5, скажем «девять». Если затем идти по кругу в том же направлении и присчитать к «девяти» еще 12 последовательных чисел круга, то опять приходим к тому же числу 5. Дело сводится, следовательно, к счету по кругу в обратном направлении от указанного числа 9 до $9 + 12$, т. е. до 21.

Если, наоборот, задумано 9, а указано 5, то от 9 до 5, считая в прямом направлении по кругу (по порядку возрастания чисел), получаем: 9, 10, 11, 12, $12 + 1$, $12 + 2$, $12 + 3$, $12 + 4$, $12 + 5$, т. е. 17. Следовательно, начиная с 5, можно прийти к задуманному числу 9, идя в обратном направлении и отсчитывая те же $5 + 12 = 17$ чисел.

102. Пусть у партнера в руках по n спичек (причем $n \geq b$) и вы предлагаете ему переложить из правой руки в левую a спичек (причем $a < b$). Тогда до перекладывания в обеих руках у него по n предметов (причем $n > a$), после первого перекладывания — в левой $n + a$, в правой $n - a$ предметов, после второго перекладывания — в левой $(n + a) - (n - a) = 2a$, в правой $n - a$ предметов и, наконец, в левой $2a$ предметов, а правая рука пуста.

103. Двухзначное число представимо в виде $10a + b$, где $0 < a \leq 9$ — число десятков, $0 \leq b < 9$ — число единиц. Разность имеет вид $10a + b - (10b + a)$, т. е. делится на 9. Если эта разность равна $10k + l$ ($k \leq 9, l \leq 9$), то $10k + l = 9k + (k + l)$ и, значит, $k + l = 9$. Итак, первую цифру разности можно найти, вычитая из 9 цифру, названную вам.

Например, если задумано число 37, то имеем: $73 - 37 = 36$. Вам сообщают цифру 6, и вы находите первую цифру: $9 - 6 = 3$. Еще один пример: $54 - 45 = 9$. Последняя цифра 9, значит, первая равна $9 - 9 = 0$, т. е. разность равна 9.

104. Частное равняется указанной вами разности между крайними цифрами числа, умноженной на 11. Например, если взять сначала число 845, то $845 - 548 = 279$, $279 : 9 = 33 = (8 - 5) \times 11$.

Чтобы доказать это правило, заметим, что каждое трехзначное число можно представить в виде $100a + 10b + c$, где $0 < a \leq 9$ — число сотен, $b \leq 9$ — число десятков и $c \leq 9$ — число единиц во взятом числе. Тогда чис-

ло с переставленными цифрами будет равно $100c + 10b + a$. Вычитая второе из первого и деля на 9, имеем

$$\frac{100a+10b+c-(100c+10b+a)}{9} = \frac{99(a-c)}{9} = 11 \times (a-c)$$

105. Из решения предыдущей задачи мы знаем, что разность между любым трехзначным числом и числом, полученным из него перестановкой крайних цифр, всегда делится на 99. Так как крайние цифры отличаются более чем на единицу, то эта разность обязательно будет трехзначным числом; обозначим ее $100k + 10l + m$ ($0 < k \leq 9, l \leq 9, m \leq 9$). Имеем

$$100k + 10l + m = 99k + (10l + m + k).$$

Так как разность делится на 99, то это равенство показывает, что обязательно $10l + m + k = 99$, откуда вытекает, что $l = 9, m + k = 9$. Число с переставленными крайними цифрами имеет вид $100m + 10l + k$, и сумма равняется

$$\begin{aligned} 100k + 10l + m + 100m + 10l + k &= \\ &= 100(k + m) + 20 \times l + (m + k) = \\ &= 100 \times 9 + 20 \times 9 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

106. Над задуманным числом n совершаются следующие действия:

$$\begin{aligned} n \times 2 + 5 &= 2n + 5, & (2n + 5) \times 5 &= 10n + 25, \\ 10n + 25 + 10 &= 10n + 35, & (10n + 35) \times 10 &= 100n + 350, \\ 100n + 350 - 350 &= 100n, & 100n : 100 &= n. \end{aligned}$$

То есть всегда получится задуманное число.

Рассматривая решение последней задачи, нетрудно понять, что ей можно придать любое число различных видоизменений. Так, например, если пожелать, чтобы всегда в результате число сотен выражало задуманное число и чтобы приходилось умножать всегда на 2, 6 и 10, но вычитать приходилось бы не 350, как в приведенной задаче, а другое число, то нужно принять во внимание, как получилось в вышеприведенной задаче 350. Это число произошло так: прибавлено 5, да умножено на 5, итого 25; к этому числу прибавлено 10, получилось 35; умножив же это число на 10, получаем 350. Следовательно, если захотеть вместо 350 вычитать из окончательного результата другое число, то и задавать нужно прибавлять не 5 и 10, а другие числа. Зададим, например, вместо 5 прибавить 4, а вместо 10 прибавить 12. Ясно, что из последнего полученного числа придется вычесть 320 ($4 \times 5 = 20; 20 + 12 = 32; 32 \times 10 = 320$), и тогда получим остаток, *число сотен* которого и даст нам задуманное число. Таким образом, задачу можно видоизменять до бесконечности.

Точно так же легко заметить, что, умножая задуманное число на 2, на 5 и на 10, мы умножаем его, в сущности, на 100 ($2 \times 5 \times 10 = 100$).

Поэтому, если мы опять-таки хотим, чтобы число сотен окончательного результата показывало задуманное число, — все равно, какие множители выбрать, лишь бы умножение на них давало в окончательном результате умножение на 100. Отсюда следует, что, оставляя те же множители 2, 5, 10, можно изменить их порядок, т. е. сначала умножить, например, на 5, потом на 10, а затем на 2 и т. д.

Точно так же вместо множителей 2, 5, 10 можно брать другие, дающие в произведении 100, например: 5, 4, 5 или 2, 2, 25 и т. д. Нужно помнить только при этом, конечно, что всем этим изменениям множителей и прибавляемых чисел соответствует изменение числа, которое в конце нужно вычесть. Так, например, будем умножать на 5, 4, 5, а прибавлять числа 6 и 9, и пусть задуманное число будет 8.

Умножив на 5, получим 40; прибавив 6, получим $40 + 6 = 46$; умножив на 4, получим $160 + 24 = 184$; прибавив 9, получим $160 + 33 = 193$; умножив это число на 5, получим $800 + 165 = 965$, т. е. для получения числа сотен, показывающего задуманное число, нужно отнять в данном случае 165 ($6 \times 4 = 24$; $24 + 9 = 33$; $33 \times 5 = 165$).

Можно также взять не 100, а любое иное число и сделать так, чтобы оно заключалось в остатке от последнего вычитания столько раз, сколько единиц заключается в задуманном числе. Так, например, возьмем число 24, которое можно представить состоящим из множителей 2, 3, 4 ($2 \times 3 \times 4 = 24$), а числа, которые будем прибавлять, пусть будут 7 и 8.

Пусть задуманное число есть 5. Удваивая его, находим 10, прибавляя 7, находим $10 + 7 = 17$; утраивая, находим $(10 + 7) \times 3 = 30 + 21 = 51$; прибавляя 8, находим $30 + 29 = 59$; беря последнее число 4 раза, получим $120 + 116 = 236$. Отнимаем отсюда 116, остается 120, в котором 24 содержится 5 раз, т. е. получается задуманное число 5.

Можно также вместо трех множителей брать только два, а вместо двух чисел прибавлять только одно, и тогда *число десятков* числа, полученного после вычисления, подобного предыдущему, покажет задуманное число.

Можно также брать четыре, пять, шесть и т. д. множителей, прибавлять соответствующее (три, четыре и т. д.) количество чисел, затем, поступая, как указано выше, угадывать задуманное кем-либо число.

Можно, наконец, вместо того, чтобы прибавлять числа, вычитать их, а в конце вместо вычитания прибавлять известное число. Так, например, воспользуемся числами первого примера настоящей задачи, и пусть задуманное число будет 12. Удвоив его, получим 24; вычитая отсюда 5, получим $24 - 5$; умножая на 5, получим $120 - 25$; вычитая 10, получим $120 - 35$; умножая на 10, получим $1200 - 350$. Здесь вместо того, чтобы вычесть, нужно прибавить 350: сумма получится 1200, и число сотен в ней (12) дает задуманное число.

Словом, читатель может видоизменять и разнообразить эту задачу, как ему угодно.

107. Секрет разгадывания с виду прост: обратите внимание на цифры, написанные в самой нижней графе. Если вам скажут, например, что задуманное число находится во 2-м, 3-м и 5-м столбцах, считая справа (или на 2-й, 3-й, 5-й пластинках веера), то сложите числа, стоящие в этих столбцах внизу, получите 22 ($2 + 4 + 16$), и будьте уверены, что задумано именно это, а не иное какое-нибудь число.

Еще пример — число 18. Вы найдете его во 2-м и 5-м столбцах. Внизу этих столбцов стоят числа 2 и 16; сложенные вместе, они дают действительно 18.

Как же составляется подобная таблица?

Если написать ряд чисел, начиная с 1, таких, чтобы каждое было вдвое больше предыдущего, т. е. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., то ряд этот обладает тем замечательным свойством, что каждое целое положительное число может быть получено, и не более чем одним способом, как сумма некоторых членов ряда. Например, $27 = 16 + 8 + 2 + 1$. Для составления таблицы мы взяли только начальные члены ряда: 1, 2, 4, 8, 16 ($2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$), сложением которых можно получить все числа от 1 до 31 ($= 2^5 - 1$). За каждым из них закреплен определенный столбец таблицы (см. нижнюю строку). Воспользовавшись указанным выше свойством ряда степеней двойки, мы помещаем каждое целое число в те столбцы, в основании которых стоят степени двойки, в сумме составляющие это число. Так 27 попадает в столбцы с основаниями 1, 2, 8, 16. Теперь ясно, почему для угадывания достаточно сложить числа, стоящие внизу столбцов. Можно воспользоваться этим свойством степеней двойки для обозначения чисел. Напишем для каждого числа последовательность из 0 и 1 такую, что на первом месте справа стоит 1 или 0 в соответствии с тем, содержится наше число в первом столбце или нет, на втором 1 или 0 в зависимости от того, стоит ли число во втором столбце, и так далее. Например, число 27 обозначается этим способом так: 11011, а число 12 — так: 01100. Условимся не писать нули, стоящие слева, тогда для числа 12 получим представление 1100.

Такой способ записи называется *двоичной системой изображения чисел*.

Для того чтобы изобразить число с его помощью, совсем не обязательно иметь перед глазами таблицу. Достаточно представить целое число в виде суммы степеней двойки и на местах, номера которых (считая справа налево, начиная с 0) участвуют в этом представлении, поставить 1, а на остальных местах 0:

Число	Двоичное изображение
$2 = 2^1$	10
$3 = 2^1 + 2^0$	11

Число	Двоичное изображение
$5 = 2^2 + 2^0$	101
$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$	10011
$134 = 2^7 + 2^2 + 2^1$ и т. д.	10000110 и т. д.

Двоичная система очень удобна для представления чисел в вычислительных машинах, так как для записи любого числа достаточно только двух знаков -0 и 1 . В общеупотребительной же десятичной системе для этого требуется 10 знаков $-0, 1, 2, \dots, 8, 9$.

108. Если задумано четное число $2n$, то, проделав с ним указанную последовательность действий, получим

$$2n \times 3 = 6n, \quad 6n : 2 = 3n, \quad 3n \times 3 = 9n, \quad 9n : 9 = n.$$

Удваивая частное n , получаем задуманное число $2n$.

Проверим это правило для нахождения задуманного числа в общем случае. Если задумано число четное, проверка уже сделана. Пусть теперь задумано нечетное число $2n + 1$. Наши действия принимают вид

$$(2n + 1) \times 3 = 6n + 3.$$

Поскольку это число на 2 не делится, то, прибавляя 1, находим $6n + 3 + 1 = 6n + 4$. Разделив это число на 2, получим $3n + 2$. Далее, $(3n + 2) \times 3 = 9n + 6$.

Частное от деления $9n + 6$ на 9 равно n (а остаток равен 6). Удваивая это частное и прибавляя 1, находим задуманное число $2n + 1$.

109. Всякое число может быть представлено в одной из следующих форм: $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3$, где букве n нужно придавать значения 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.

1) Возьмем сначала число вида $4n$ и произведем над ним указанные выше действия. Получается

$$4n \times 3 = 12n, \quad 12n : 2 = 6n, \quad 6n \times 3 = 18n, \\ 18n : 2 = 9n, \quad 9n : 9 = n, \quad 4 \times n = 4n.$$

2) Для числа вида $4n + 1$ получим

$$(4n + 1) \times 3 = 12n + 3, \quad (12n + 3 + 1) : 2 = 6n + 2, \\ (6n + 2) \times 3 = 18n + 6, \quad (18n + 6) : 2 = 9n + 3.$$

Частное от деления $9n + 3$ на 9 равно n , и, пользуясь правилом, мы угадываем число $4n + 1$.

3) Для числа вида $4n + 2$ имеем

$$(4n + 2) \times 3 = 12n + 6, \quad (12n + 6) : 2 = 6n + 3, \\ (6n + 3) \times 3 = 18n + 9, \quad (18n + 9 + 1) : 2 = 9n + 5.$$

Частное от деления $9n + 5$ на 9 равно n , и, прибавляя к $4n$ число 2 (деление нацело не выполнилось только во второй раз), получаем задуманное число.

4) Для числа вида $4n + 3$ имеем

$$(4n + 3) \times 3 = 12n + 9, \quad (12n + 9 + 1) : 2 = 6n + 5,$$

$$(6n + 5) \times 3 = 18n + 15, \quad (18n + 15 + 1) : 2 = 9n + 8.$$

Частное от деления $9n + 8$ на 9 равно n , и, поступая с ним, как указано в условии, находим задуманное число $4n + 3$.

Таким образом, всегда получается задуманное число.

111. Обращаясь к решению задачи 109, находим, что для числа вида $4n$ окончательный результат вычисления дает $9n$, т. е. число, кратное 9. Следовательно, сумма цифр этого числа должна делиться на 9, а отсюда заключаем, что неизвестная нам цифра такова, что, сложив ее с остальными известными цифрами, мы должны получить число, делящееся на 9 (т. е. кратное 9). Если же сумма известных цифр кратна 9, то значит, неизвестная цифра сама есть 9, ибо нам дано, что она не нуль.

Для числа вида $4n + 1$ результат вычислений есть $9n + 3$; прибавляя сюда 6, получаем число, кратное 9, т. е. кратна 9 и сумма его цифр.

Для числа вида $4n + 2$ результат вычислений дает $9n + 5$; прибавляя 4, получаем число, кратное 9, следовательно, и сумма его цифр должна быть кратной 9.

Наконец, для числа вида $4n + 3$ окончательный результат вычислений дает $9n + 8$. Прибавляя 1, находим число, кратное 9. Сумма его цифр также должна быть кратна 9.

Итак, указанные нами выше правила верны.

112. Если над каким-либо числом n производится ряд умножений и

делений, то получается результат вида $n \frac{abc...}{ghk...}$. Если произвести те же

действия над числом p , то получится результат вида $p \frac{abc...}{ghk...}$. Оба эти результата, разделенные первый на n , а второй на p , дадут, очевидно, одно

и то же число $\frac{abc...}{ghk...}$. Итак, зная число $\frac{abc...}{ghk...}$ и сумму $\frac{abc...}{ghk...} + n$, достаточно из последнего вычесть первое, чтобы получить число n .

Можно, очевидно, всячески видоизменять настоящую задачу, так как, во-первых, можно делить и умножать на какие угодно числа, а во-вторых, вместо того, чтобы умножать и делить поочередно, можно сначала умножать два, три и т. д. раза подряд, затем столько же раз делить или наоборот. Можно также, зная последнее частное, заменять сложе-

ние вычитанием, если задуманное число окажется меньше полученного последнего частного, и т. д.

113. I. Пусть задуманные числа будут a, b, c, d, e . Даны суммы $a + b, b + c, c + d, d + e, e + a$. Складывая суммы, стоящие на нечетных местах, получим $a + b + c + d + e + a$ и, складывая суммы, стоящие на четных местах, получим $b + c + d + e$.

Вычитая из первой суммы вторую, получаем $2a$. Половина этого числа есть первое из задуманных чисел a . Вычитая a из $a + b$, получим b и т. д.

II. Пусть задуманы числа a, b, c, d, e, f . Даны суммы $a + b, b + c, c + d, d + e, e + f, f + b$. Суммы, стоящие на нечетных местах, за исключением первой, дают $c + d + e + f$. Суммы, стоящие на четных местах, дают $b + c + d + e + f + b$. Разность между этой суммой и предыдущей есть $2b$; половина этого числа и есть задуманное второе число b . Остальные числа найти уже легко.

Можно эти задачи решать иными способами, из которых укажем на следующие.

Пусть число задуманных чисел будет нечетное.

Сложив все данные суммы и разделив полученное число пополам, найдем сумму всех задуманных чисел. Если же задумано четное число чисел, то сложим все данные суммы, кроме первой, результат поделим пополам и получим сумму всех задуманных чисел, кроме первого. Но, зная сумму всех задуманных чисел, легко найти в данном случае каждое число в отдельности. Пусть, например, задуманы числа 2, 3, 4, 5, 6. Суммы, которые даются, будут: 5, 7, 9, 11, 8. Складывая эти числа, получим 40. Половина этого числа (20) и есть сумма всех задуманных чисел.

Зная теперь, что сумма 2-го и 3-го задуманных чисел есть 7, а сумма 4-го и 5-го чисел есть 11, вычитаем $7 + 11 = 18$ из 20 и получаем первое задуманное число 2 и т. д.

Подобным же образом надо поступать и в том случае, когда задумано четное число чисел.

Можно узнавать числа и так. Если кто-либо задумает 3 числа, предложите ему сказать их суммы по два, как объяснено выше; если он задумал 4 числа, предложите ему сложить их по три и сказать вам суммы; если задумано 5 чисел, предложите сложить их по четыре и сказать вам суммы и т. д. Затем, чтобы отгадать задуманные числа, нужно руководствоваться следующим общим правилом.

Все известные суммы сложить и полученный результат разделить на число, единицей меньшее числа задуманных чисел. Полученное частное и есть сумма всех задуманных чисел. После этого уже нетрудно найти каждое число в отдельности. Пусть, например, задуманы 3, 5, 6, 8. Суммы по три будут $3 + 5 + 6 = 14, 5 + 6 + 8 = 19, 6 + 8 + 3 = 17, 8 + 3 + 5 = 16$. Склады-

вая эти суммы, получаем 66. Эту сумму надо разделить на 3 (т. е. на число, единицей меньше числа задуманных чисел). Получается 22 — сумма всех задуманных чисел. Если теперь из 22 вычесть 14, получим последнее из задуманных чисел (8); вычитая 19, получаем первое (3) и т. д. Понять и доказать все это нетрудно.

Желающим предоставляем доказать, почему в случае четного числа задуманных чисел нельзя брать попарно суммы так, чтобы последняя состояла из последнего задуманного числа плюс первое, а непременно надо так, чтобы складывать последнее и второе из задуманных чисел.

114. Действия, которые произв $\frac{na+b}{c}$ я в данном случае над задуманным числом n , $\frac{na}{c}$ и $\frac{b}{c}$ выразить так: $\frac{na+b}{c} = \frac{na}{c} + \frac{b}{c}$, а это выражение можно представить в виде $\frac{na}{c} + \frac{b}{c}$. Ясно, что, вычитая $n \frac{c}{c}$, получим остаток $\frac{b}{c}$.

115. Число, которое умножается на 2, дает *всегда четное* произведение. Следовательно, сумма обоих произведений четна или нечетна, смотря по тому, будет ли *четное* или *нечетное* другое произведение. Но если число множится на нечетный множитель, то произведение будет четным, если множимое четно, и нечетным, если нечетное множимое. Итак, по сумме обоих произведений можно судить, четно или нечетно то число, которое множится на нечетный множитель.

116. Пусть A и B — взаимно простые числа и два других a и c — тоже взаимно простые числа, причем A кратно числу a . После соответствующих умножений может получиться сумма $Ac + Ba$ или $Aa + Bc$. Ясно, что первая сумма делима на a , вторая же — нет. Следовательно, B умножится или не умножится на a , смотря по тому, делима или неделима на a сумма, полученная задумавшими после соответствующих умножений и сложения.

117. Пусть задуманные числа будут a, b, c, d, \dots Над ними производятся следующие действия:

для первых двух чисел:

$$(2a + 5) \times 5 = 10a + 25, \quad 10a + 25 + 10 = 10a + 35, \\ 10a + 35 + b = 10a + b + 35;$$

для третьего числа:

$$(10a + b + 35) \times 10 + c = 100a + 10b + c + 350;$$

для четвертого:

$$(100a + 10b + c + 350) \times 10 + d = 1000a + 100b + 10c + d + 3500$$

и т. д.

Отсюда ясно, что, вычитая из результата 35, 350, 3500, смотря по количеству задуманных чисел, мы получим все задуманные числа в виде цифр остатка, считая слева направо.

Х. ИГРЫ С ЧИСЛАМИ И ПРЕДМЕТАМИ

$$118. 1 = \sqrt[5]{\frac{5}{5}} = 5^{5-5}.$$

$$119. 2 = \frac{5+5}{5}.$$

$$120. 4 = 5 - \frac{5}{5}.$$

$$121. 5 = 5 + 5 - 5 = 5 \times \frac{5}{5}.$$

$$122. 0 = 5 \times (5 - 5) = \frac{5-5}{5} = \sqrt[5]{5-5} = (5 - 5)^5.$$

123. Эта задача сложнее предыдущих. Вот некоторые из ее решений:

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3}, 31 = 33 - 3 + \frac{3}{3}, 31 = 33 - \frac{3+3}{3}.$$

$$124. 100 = 5 \times (-2 + 4) \times (1 + 2 + 7).$$

125. Чтобы быть победителем, старайтесь только, чтобы вам пришлось сказать число 89. Ясно, что если вы скажете это число, то, какое бы число (десять или меньше) ни прибавил ваш противник, вы тотчас найдете соответственное число, добавив которое к полученному противником вы получаете сто и выигрываете. Но, чтобы суметь всегда сказать «89», а потом, значит, и «100», постарайтесь разобраться в следующих очень нетрудных рассуждениях.

Начнем отнимать, сколько возможно, от ста по одиннадцати. Получим ряд таких чисел: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Или же, если напишем их в порядке возрастания, получим

$$1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.$$

Запомнить эти числа очень легко: стоит только взять предельное число, т. е. 10, и прибавить к нему 1 — получится 11. Затем берем это число и все числа, составленные умножением 11 на 2, на 3, на 4, ..., на 8, — получим 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88; увеличим каждое из этих чисел единицей и начнем единицей же ряд. Получим опять-таки предыдущий, уже написанный нами ряд чисел:

$$1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.$$

Ясно теперь, если вы скажете «1», то, какое бы число (по условию не больше 10) ни сказал другой играющий, он не помешает вам сказать 12; точно так же вы всегда можете сказать 23, а затем 34, 45, 56, 67, 78 и 89.

Когда вы скажете «89», то, какое бы число (не больше 10) ни сказал ваш соперник, вы говорите «сто» и выигрываете.

Отсюда видно также, что если оба играющих знают, в чем дело, то выигрывает всегда тот, кто первый скажет «один», т. е. тот, кто начинает игру.

126. Если вы хорошо усвоили решение предыдущей задачи, то нетрудно видеть, как надо поступать в каждом отдельном случае.

Пусть, например, назначенное число будет 120; предельное, как и выше, равно 10. Тогда, очевидно, нужно иметь в виду числа 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10, т. е., начиная с 10, все числа, кратные 11, увеличены на 10. Отсюда также видно, что знающий решение этой задачи выигрывает всегда, если он начинает.

Пусть, например, заданное число будет 100, но предельное число есть не 10, а 8. В таком случае нужно иметь в виду числа 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1, т. е., начиная от единицы, все числа, кратные 9, увеличены на единицу. И в данном случае знающий задачу всегда выигрывает, если он начинает.

Но если принять за предельное число, например, 9, то числа, которые нужно иметь в виду, будут 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10. И ясно, что начинающий здесь может проиграть, если другому известен секрет, ибо, какое бы число начинающий ни сказал, он не может помешать другому назвать 10, 20 и т. д. — все числа до 100.

127. Можно перекладывать спички так: 4 к 1, 7 к 3, 5 к 9, 6 к 2, 8 к 10 — или иначе: 7 к 10, 4 к 8, 6 к 2, 1 к 3 и 5 к 9.

128. Обозначим положенные в ряд спички номерами 1, 2, 3, ..., 15. Тогда задача решается путем следующих 12 перекладываний: 2 к 6, 1 к 6, 8 к 12, 7 к 12, 9 к 5, 10 к 5, 4 между 5 и 6, 3 между 5 и 6, 11 между 5 и 6, 13 на место с номером 11, 14 на то же место, 15 на то же место.

129. Чтобы показать процесс правильного перенесения кружков, обозначим кружки цифрами 1, 2, 3, ..., 7, 8, начиная с наименьшего, затем изобразим процесс перенесения таблицей:

	Палочка А	Вспомога- тельная палочка	Палочка В
До начала	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	-	-
После 1-го перенесения	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1	-
После 2-го перенесения	3, 4, 5, 6, 7, 8	1	2
После 3-го перенесения	3, 4, 5, 6, 7, 8	-	1, 2
После 4-го перенесения	4, 5, 6, 7, 8	3	1, 2
После 5-го перенесения	1, 4, 5, 6, 7, 8	3	2
После 6-го перенесения	1, 4, 5, 6, 7, 8	2, 3	-
После 7-го перенесения	4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	-
После 8-го перенесения	5, 6, 7, 8	1, 2, 3	4
После 9-го перенесения	5, 6, 7, 8	2, 3	1, 4
После 10-го перенесения	2, 5, 6, 7, 8	3	1, 4
После 11-го перенесения	1, 2, 5, 6, 7, 8	3	4
После 12-го перенесения	1, 2, 5, 6, 7, 8	-	3, 4
После 13-го перенесения	2, 5, 6, 7, 8	1	3, 4
После 14-го перенесения	5, 6, 7, 8	1	2, 3, 4
После 15-го перенесения	5, 6, 7, 8	-	1, 2, 3, 4

Отсюда мы видим, что на палочку *III*, когда она свободна, надеваются только нечетные кружки (1-й, 3-й, 5-й и пр.), а на *B* — только четные. Так что, например, для перенесения четырех верхних кружков нужно было сначала перенести три верхних на вспомогательную палочку — что, как видно из таблицы, потребовало семи отдельных переключиваний, — затем мы перенесли 4-й кружок на третью палочку — еще одно

перекладывание — и, наконец, три верхних кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверх 4-го кружка (причем 1-я палочка играла у нас роль вспомогательной), что опять потребовало семи отдельных перекладываний.

Итак, вообще, чтобы при таких условиях перенести колонну из n каких-нибудь кружков, расположенных вертикально в убывающем порядке, нужно сначала перенести колонну из $(n - 1)$ верхних кружков на одно из свободных мест, потом основание, т. е. n -й кружок, на другое свободное место и, наконец, на то же место опять всю колонну из $(n - 1)$ верхних кружков.

Обозначая число необходимых отдельных перенесений буквою Π со значком, соответствующим числу кружков, имеем, следовательно,

$$\Pi_n = 2\Pi_{n-1} + 1.$$

Понижая значение n до единицы и делая подстановку, легко находим

$$\Pi_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаем, следовательно, сумму геометрической прогрессии, которая дает

$$\Pi_n = 2^n - 1.$$

Таким образом, в случае детской пирамиды из 8 кружков нужно сделать $2^8 - 1$, или 255, отдельных перекладываний кружков.

Легенда.

Допустим, что перенос одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемещение пирамиды из восьми кружков потребуется 4 минуты с лишком. Что же касается переноса башни из 64 кружков, то на это понадобится

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615 \text{ сек.}$$

А это значит, ни более и ни менее, как пять с лишним миллиардов веков.

130. Ответ на вопрос неожиданно оказывается связанным с двоичной системой изображения чисел (см. решение задачи 107). Представим каждое из чисел 12, 10, 7 в двоичной системе:

12	—	1100
10	—	1010
7	—	111

В каждом столбце получившейся таблицы, за исключением крайнего правого, стоит по две единицы. Первым ходом игрок А делает так, чтобы в каждом столбце стояло по две единицы или ни одной:

12	—	1100
10	—	1010
6	—	110

Своим ходом игрок Б нарушает это свойство, а игрок А его опять восстанавливает:

1	—	1
7	—	111
6	—	110

Если мы проследим за игрой далее, то увидим, что каждым ответным ходом игрок А восстанавливает нарушенное предыдущим ходом Б свойство таблицы содержать в каждом столбце четное количество единиц.

Назовем систему из трех целых неотрицательных чисел правильной, если после представления каждого числа в двоичной системе любой столбец содержит четное количество единиц, и неправильной в противном случае.

Легко видеть, что правильная система после любого хода становится неправильной, а из любой неправильной системы одним ходом всегда можно сделать правильную. Для этого давайте выберем самый левый столбец, где стоит нечетное число единиц, и то из чисел, которое в этом столбце имеет единицу, заменим на меньшее так, чтобы получилась правильная система. Это, очевидно, всегда можно сделать.

Если исходная система чисел неправильная (как в нашем примере), то начинающий игру всегда будет в выигрыше. Для этого он должен каждым своим ходом делать правильный набор чисел. Если же исходная система правильная (например, 12, 10, 6 или 13, 11, 6), то ваш противник, если он знает секрет игры, выиграет у вас, как бы вы ни играли. В этом случае делайте произвольные ходы в надежде, что противник ошибется и после его хода система чисел станет неправильной. Тогда перехватывайте инициативу и доводите игру до победного конца.

Можно раскладывать спички на 4, 5 и более кучек.

Вы выиграете, если будете играть так, чтобы после каждого вашего хода в любом столбце таблицы стояло четное число единиц.

XI. ДОМИНО

132. Все дело в том, чтобы, приготавливаясь к «угадыванию» и переворачивая косточки домино «лицом» вниз, тринадцать из них расположить в таком последовательном порядке, как на рис. 163.



Рис. 163

Ряд этих косточек, как видим, представляет ряд первых двенадцати натуральных чисел да еще нуль:

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0,

и числа эти идут в убывающем порядке. Справа за этим рядом вы помещаете (тоже «лицом» вниз) еще 12 косточек в каком угодно порядке. Если теперь вы уйдете в другую комнату, а кто-нибудь переместит справа налево несколько (менее 12) косточек и приставит их так, чтобы они шли за (6, 6) влево, то, возвратясь, вы откроете *среднюю* (т. е. 13-ю по счету, считая слева) косточку в ряду, и на ней будет как раз столько очков, сколько было перемещено в ваше отсутствие косточек.

Почему так, нетрудно разобраться. Когда вы уходите в другую комнату, то вы знаете, что в середине ряда перевернутых «изнанкой» вверх косточек домино лежит пустая косточка, т. е. (0, 0). Представим теперь, что перемещена в ваше отсутствие с правого конца на левый одна косточка. Какая тогда косточка будет находиться в середине? Очевидно, (0, 1), т. е. единица. А если переместить две косточки, то в середине будет находиться косточка с двумя очками; если переместить три косточки, то в середине будет косточка с тремя очками и т. д. Словом, средняя косточка обязательно верно покажет вам число перемещенных справа на левый конец косточек домино. (Перемещаются, что надо всегда помнить, не более 12 косточек.)

Игру можно продолжать. Опять уйти в другую комнату и попросить кого-либо переместить с правого конца на левый еще несколько косточек. Возвратясь в комнату, вы откроете косточку, указывающую число перемещенных косточек. Она будет теперь вправо от средней и, чтобы найти ее, надо за этой средней отсчитать по порядку ровно столько, сколько косточек было перемещено в предыдущий раз.

133. Сумма всех очков равна 168. Убедиться в этом можно непосредственным вычислением, перебрав все 28 косточек домино. Но это долго и скучно. Поступим иначе.

Предположим, что у нас имеется два комплекта домино. Разобьем все 56 косточек на 28 пар так, чтобы в каждую пару входили две косточки из разных комплектов, причем такие, что сумма очков на первых и вторых местах у них равна 6. Например: (3, 5) и (3, 1), (6, 4) и (0, 2), (0, 6) и (6, 0), (3, 3) и (3, 3) и т. д. Это, очевидно, можно сделать. Сумма очков в каждой паре равна 12, следовательно, сумма очков в двух комплектах равна $28 \times 12 = 336$. В одном же комплекте будет содержаться вдвое меньше очков, т. е. 168.

Сравните это решение с решением задачи 38.

136. Предположим, что такой квадрат сложить можно. Проведем параллельно основанию квадрата три прямые, делящие боковые стороны квадрата на четыре равные части. По условию каждая из проведенных прямых пересечет хотя бы одну косточку домино. Но над любой из прямых лежит четное число (4, 8 или 12) маленьких квадратов, равных половине косточки. Поэтому каждая прямая пересекает четное число косточек и, значит, не меньше двух. Таким образом, проведенные прямые пересекают не менее шести косточек. Если теперь аналогичным образом провести три прямые, параллельные боковым сторонам, то и они должны пересечь не менее шести косточек. Поскольку ни одна косточка не может пересекаться двумя прямыми, то в нашем квадрате должны присутствовать по крайней мере 12 косточек, что невозможно.

137. Такой квадрат сложить нельзя. Показать это можно точно так же, как и в предыдущей задаче. Необходимо провести по пяти прямых, параллельных сторонам квадрата.

138. Прямоугольник сложить можно. Одно из решений приведено на рис. 164.

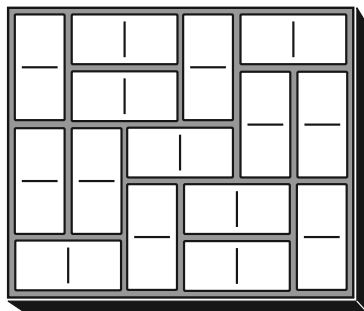


Рис. 164

ХИ. ШАШКИ

139. Задача решается в 24 хода следующими перемещениями:

6 в 5; 2 в 4; 4 в 6; 4 в 6; 1 в 2; 2 в 4;
 3 в 4; 3 в 1; 3 в 2; 5 в 3; 5 в 3; 5 в 3;
 7 в 5; 7 в 5; 7 в 5; 8 в 7; 9 в 7; 6 в 7;
 6 в 8; 8 в 9; 4 в 6; 4 в 6; 6 в 8; 5 в 4.

140. Исходное положение шашек показано на рис. 165.



Рис. 165



Рис. 166

Первое перемещение. Слева имеем два свободных места, перекладываем туда 6-ю и 7-ю шашки. Получается расположение, как на рис. 166.



Рис. 167

Второе перемещение. 3-ю и 4-ю шашки перекладываем на освободившиеся места и получаем рис. 168.



Рис. 168

Третье перемещение. 7-ю и 1-ю шашки перекладываем на свободные места, получаем расположение, как на рис. 168.

Четвертое перемещение. Наконец, перекладываем на свободные места 4-ю и 8-ю шашки и получаем требуемое расположение: идут подряд четыре черных и четыре белых шашки (рис. 169).

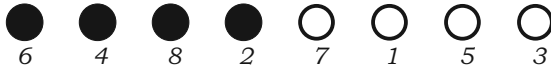


Рис. 169

Из этого последнего расположения шашек, наоборот, можно перейти к исходному также четырьмя перемещениями. Решите эту обратную задачу. Теперь это нетрудно.

141. Первоначальное расположение шашек показано на рис. 170.



Рис. 170

На рис. 171 показаны последовательные перемещения шашек:

- 1) перемещаются на свободные места 8-я и 9-я шашки;
- 2) перемещаются на свободные места 3-я и 4-я шашки;
- 3) перемещаются на свободные места 6-я и 7-я шашки;
- 4) перемещаются на свободные места 9-я и 1-я шашки;
- 5) наконец, перемещаются на свободные места 4-я и 10-я шашки.

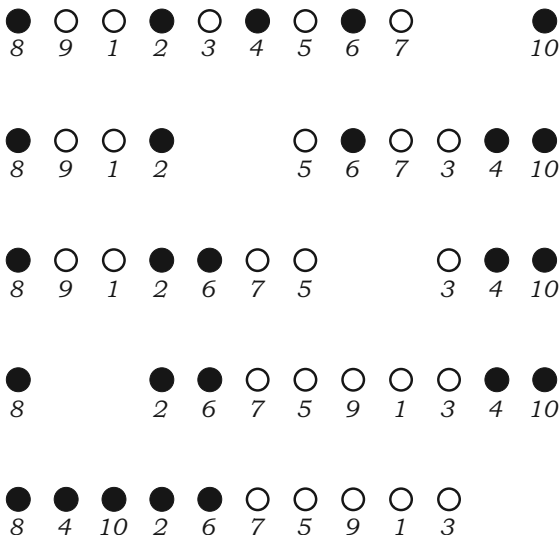


Рис. 171

142. Первоначальное расположение показано на рис. 64. Последовательные перемещения показаны на рис. 172.

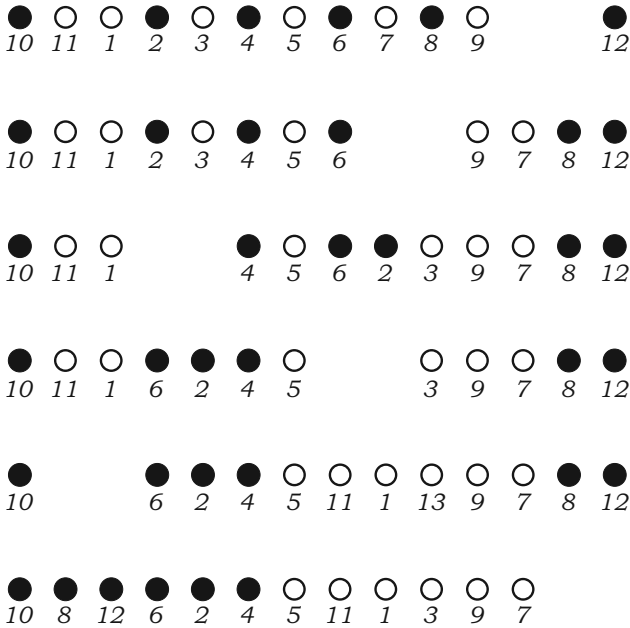


Рис. 172

143. Первоначальное расположение показано на рис. 65. Шесть последовательных перемещений показаны на рис. 173. Нетрудно догадаться, как сделать седьмое и последнее перемещение.

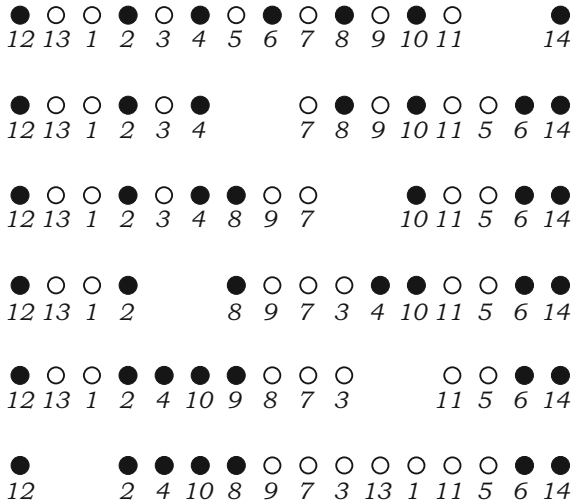


Рис. 173

144. Рис. 174 показывает, как решается задача.

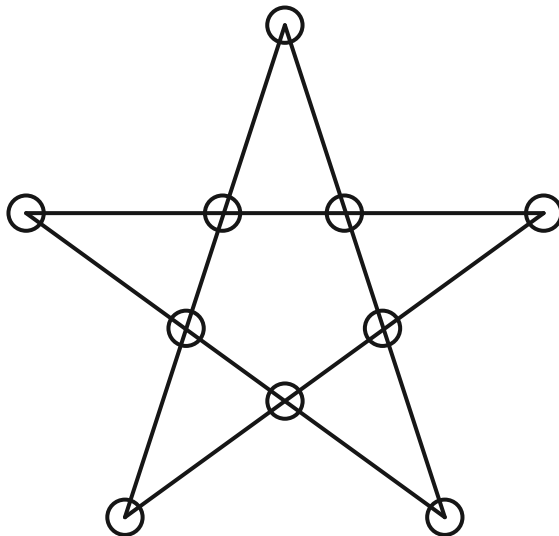


Рис. 174

145. Для решения задачи шашки нужно поставить так, как показано на рис. 175.



Рис. 175

Как же найти это решение? Поставим в ряд 24 спички (рис. 176).



Рис. 176

Считая от 1 до 7, находим, что в первый раз придется выбросить 7-ю, 14-ю и 21-ю спички. Отбрасываем их и опять начинаем считать от 1 до 7; сначала отсчитаем три спички за 21-й, а затем возвращаемся к началу ряда, который содержит теперь только 21 спичку. Из него придется на этот раз выбросить 4-ю, 12-ю и 20-ю спички. Повторяя этот процесс, на следующем шаге мы выбросим 5-ю, 15-ю, 24-ю спички, затем 10-ю, 22-ю и, наконец, 9-ю спичку. Останется 12 спичек. Если теперь на места оставшихся спичек поставим черные шашки, а на места выброшенных белые, то получим требуемое расположение (рис. 175).

ХІІІ. ШАХМАТЫ

146. Решение приведено на рис. 177.

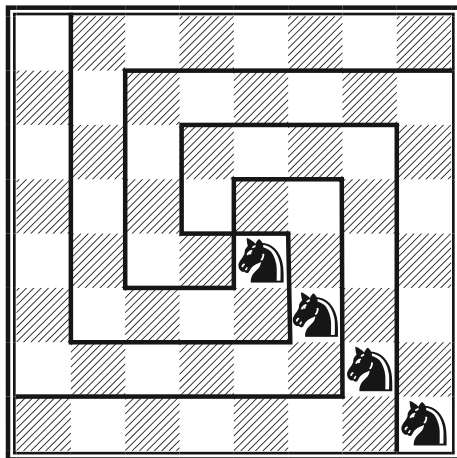


Рис. 177

147. Для того чтобы конь обошел все свободные 63 клетки, он должен сделать 63 хода. Заметим, что при каждом ходе конь меняет цвет поля, на котором он находился. Так что после хода с номером 63 он будет находиться на поле, цвет которого отличен от цвета исходного поля. Но по условию после этого хода конь должен вернуться на исходную клетку. Полученное противоречие доказывает, что конь не может совершить требуемое путешествие.

Точно так же можно рассуждать, если на доске стоит любое нечетное число фигур.

148. Предположим, что маршрут коня, отвечающий условию задачи, существует. Перенумеруем все 62 свободных поля шахматной доски следующим образом. Исходному полю присвоим номер 1. А все оставшиеся поля будем нумеровать 2, 3, ..., 62 в том порядке, как их проходит конь. Ввиду того, что конь при каждом ходе меняет цвет поля, все поля с нечетными номерами будут иметь один цвет и точно так же одного цвета будут все поля с четными номерами. Следовательно, свободная часть доски состоит из 31 черного и 31 белого поля. Но это неверно,

так как поля, занятые пешками, имеют один цвет. Требуемый маршрут не существует.

149. Расставим в клетках центрального квадрата буквы a, b, c, d, e, f и цифру 0 так, как это показано на рис. 178.

a	f	e	b
e	0	0	f
f	0	0	e
d	e	f	c

Рис. 178

Выпишем теперь их последовательно в порядке прохождения полей конем. Получим цепочку из 16 знаков. С любого из полей, обозначенных буквами, конь может перейти на поле, обозначенное другой буквой, только через поле, где стоит 0. Поэтому в последовательности между любыми двумя буквами разного наименования обязательно встретится 0. Заменяем теперь каждую группу рядом стоящих одинаковых букв одной буквой того же наименования. После этого в последовательности останется по крайней мере 6 букв и эти буквы должны быть отделены друг от друга нулями. Ясно, что имеющихся у нас четырех нулей для этого недостаточно. Следовательно, обход невозможен.

150. Как бы жуки ни переползали, всегда останется пустая клетка. Действительно, назовем черными тех жуков, которые сначала сидели на черных клетках, а остальных назовем белыми. После того, как каждый жук переполз на соседнюю клетку, все черные жуки оказались на белых клетках. Мы имеем 13 черных жуков и только 12 белых клеток. Значит, на некоторой белой клетке встретятся по крайней мере два жука. Но тогда одна клетка доски останется пустой (ведь число клеток равно числу жуков).

Точно такой же ответ будет в случае любой квадратной доски с нечетным числом клеток. Подтвердить это можно аналогичным рассуждением.

151. Жуки могут переползти на соседние поля так, что все клетки останутся занятыми. Чтобы показать это, давайте разрежем шахматную доску на кольца (рис. 179).

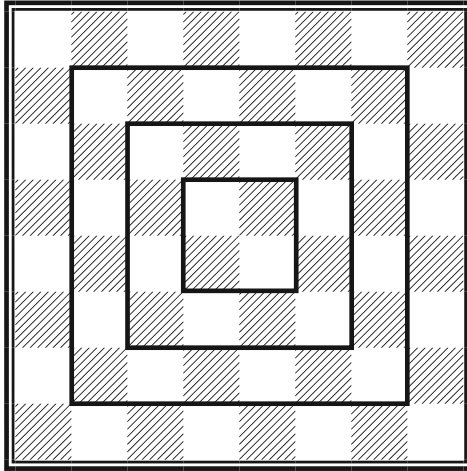


Рис. 179

И пусть каждый жук переползет по своему кольцу на соседнюю клетку, двигаясь по направлению движения часовой стрелки. Очевидно, при этом каждая клетка останется занятой.

152.

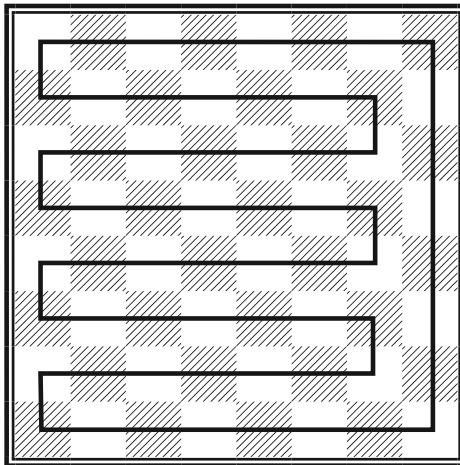


Рис. 180

На рис. 180 показана замкнутая линия, проходящая через каждую клетку доски. Если жук будет ползти по этой линии в одном направлении, то он обойдет доску так, как это требуется условием задачи.

153. Если бы это можно было сделать, то покрытым оказалось бы четное число клеток: ведь каждая кость домино покрывает в точности две клетки. Но свободная часть доски состоит из 63 клеток. Ответ: невозможно.

154. Каждая положенная на доску кость домино покрывает одно черное и одно белое поле. Поэтому, если какая-то часть доски покрыта костями домино, то она состоит из одинакового числа черных и белых полей. Но пешки, поставленные на доску, заняли два поля одного цвета; значит, в оставшейся части доски будет разное число черных и белых клеток (во всей доске 32 черных и 32 белых поля). Значит, ее нельзя покрыть костями домино.

Из приведенного рассуждения видно, что если мы поставим две пешки на любые поля одного цвета, то оставшаяся часть доски не может быть покрыта костями домино.

155. Рассмотрим замкнутую линию на рис. 180. Если пешки стоят на соседних полях, то разорванная линия будет состоять из одного куска, проходящего через 62 поля, при этом цвета полей чередуются. Легко видеть, что если мы начнем класть кости домино вдоль этой линии, то закроем всю оставшуюся часть доски. Если пешки не стоят на соседних полях, то линия разорвется на два непересекающихся куска. Каждый при этом будет проходить через четное число клеток (пешки стоят на полях разных цветов). Значит, каждый кусок линии может быть закрыт костями домино. Ответ: как бы мы ни расставляли две пешки на полях разных цветов, оставшуюся часть доски всегда можно покрыть костями домино.

156. Если мы разместим 32 шахматные фигуры на белых полях, то все белые поля будут заняты и кость домино положить будет негде (как мы уже условились, кость домино покрывает два соседних поля, одно из них белое, другое черное). Покажем, что, как бы мы ни размещали на доске 31 фигуру, всегда найдется место для домино. Покроем шахматную доску 32 костями домино (например, вдоль линии на рис. 180). Как бы мы ни расставляли теперь на доске 31 фигуру, по крайней мере на одной кости фигур стоять не будет. Этим все и доказано.

XIV. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТАМИ

159. Конечно, можно во всех клетках квадрата поставить число 2. Получившийся числовой квадрат будет удовлетворять условиям задачи. Но если потребовать, чтобы среди чисел было по крайней мере одно нечетное, задача становится не такой простой.

Прежде всего, сделав несколько проб, легко убедиться, что в центре квадрата не могут стоять ни 1, ни 3. Этому факту можно дать и строгое доказательство.

Предположим, что числа расставлены так, как требуется. Прибавим друг к другу числа, стоящие на диагоналях и во втором столбце (при этом число, стоящее в центре квадрата, будет взято трижды), и вычтем из результата числа, стоящие в первой и третьей строках. Разность, как легко видеть, будет равна утроенному числу из центра квадрата. С другой стороны, сумма чисел на диагоналях, в каждом столбце и в каждой строке равняется 6; значит, разность должна равняться 6. Следовательно, в центре квадрата стоит число 2.

Далее, легко видеть, что сумма чисел равняется 6 только в том случае, если все они различны или все равны 2. Поэтому по крайней мере в одной из вершин квадрата должно стоять число 2. Искомые расстановки теперь легко находятся (рис. 181). Все они получаются из первой с помощью симметрий относительно диагонали (2, 2, 2), относительно второй строки и относительно второго столбца.

1	3	2
3	2	1
2	1	3

3	1	2
1	2	3
2	3	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Рис. 181

Для построения нужного размещения чисел можно воспользоваться одним легко запоминающимся приемом. Расположим сначала числа так, как на рис. 182, а. Затем числа, лежащие вне квадрата $ABCD$, сдвигаем соответственно вниз, вверх, влево или вправо на 3 клетки так, чтобы они попали на свободные места в квадрате. Получаем в результате требуемое размещение (рис. 182, б).

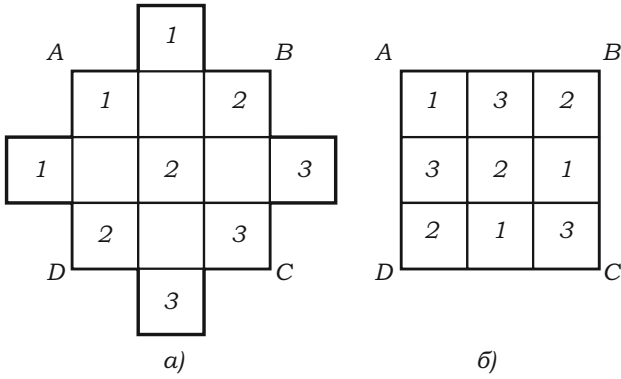


Рис. 182

160. Поступим так же, как в конце решения предыдущей задачи. Расставим числа, как показано на рис. 183, а, а затем сдвинем стоящие вне квадрата числа соответственно на 3 клетки влево, вправо, вниз и вверх так, чтобы они попали на свободные места в квадрате. Получим нужное размещение (рис. 183, б).

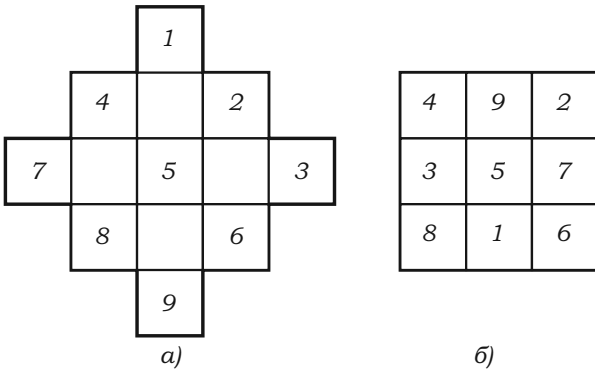


Рис. 183

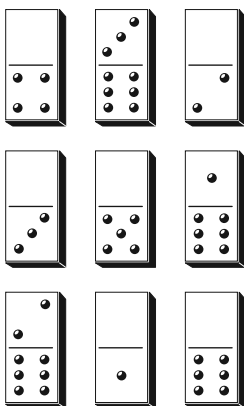


Рис. 184

Можно также для решения этой задачи взять соответствующие кости домино (рис. 184).

161. Использованный нами прием поможет и в этом случае. Пристроим на всех сторонах квадрата из 25 клеток еще по четыре клетки (рис. 185), а затем в полученной фигуре расположим косыми рядами последовательно числа от 1 до 25.

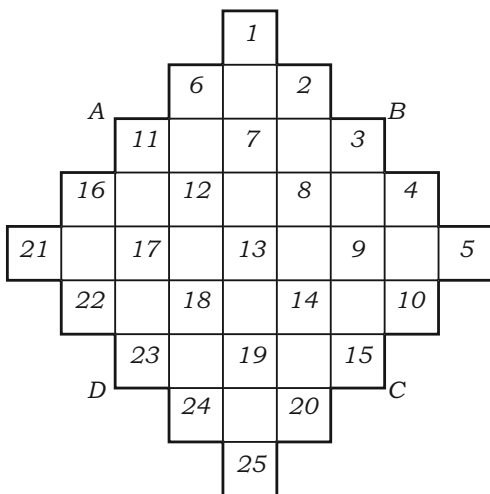


Рис. 185

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Рис. 186

Затем, сдвинув все числа, стоящие вне квадрата $ABCD$, на 5 клеток соответственно вниз, вверх, влево и вправо, получим требуемое расположение (рис. 186).

162. Прием, изложенный в решениях предыдущих задач, не позволяет, как легко видеть, строить волшебные квадраты с 16 клетками, и тем не менее существует большое число расположений, удовлетворяющих условиям задачи.

Не рассматривая общего приема решения таких задач, приведем лишь два ответа к этой задаче. (рис. 187).

4	5	14	11
1	15	8	10
16	2	9	7
13	12	3	6

3	2	14	15
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

Рис. 187

Простой способ, использованный нами в решениях задач 160, 161, пригоден для построения волшебных квадратов с любым нечетным количеством клеток. К сожалению, приемы построения волшебных квадратов с четным числом клеток намного более сложны.

163. Прежде всего предположим, что буквы одинаковы. Поставим одну букву в какой-нибудь клетке первой диагонали. При этом на второй диагонали окажутся запрещенными две клетки, стоящие в одном горизонтальном и вертикальном ряду с уже занятой клеткой. В одной из остальных двух клеток второй диагонали можно поставить вторую букву. Далее легко заметить, что две буквы, поставленные на диагоналях, однозначно определяют расстановку в соответствии с условиями задачи двух оставшихся букв (рис. 188).

<i>a</i>			
		<i>a</i>	
			<i>a</i>
	<i>a</i>		

Рис. 188

Итак, если фиксировать место буквы на первой диагонали, то задача имеет два решения. Но так как первую букву можно поставить в любой клетке первой диагонали, то задача имеет $2 \times 4 = 8$ решений. Так как четыре различных буквы можно перемещать 24 способами, то в этом случае задача имеет $8 \times 24 = 192$ решения.

164. Предположим, что мы расставим буквы так, как это требуется в задаче. Поменяем местами какие-либо два столбца или две строки. При этом получится новое расположение букв, также удовлетворяющее условию задачи. Очевидно, столбцы и строки можно переставить так, что в верхней строке и крайнем левом столбце буквы разместятся в таком порядке, как показано на рис. 189.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>			
<i>c</i>			
<i>d</i>			

Рис. 189

Подобные расположения букв будем называть основными. Найдем теперь все основные расстановки букв. Легко видеть, что во второй строке буквы *a*, *c*, *d* можно разместить только тремя способами: (*c*, *d*, *a*),

$(d, a, c), (a, d, c)$. Первым двум соответствуют единственные расположения букв в третьей и четвертой строках, третьему соответствуют два расположения. Итак, имеется всего четыре основных размещения букв, представленных на рис. 190.

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

a	b	c	d
b	d	a	c
c	a	d	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	b	a
d	c	a	b

Рис. 190

Из каждого основного перестановкой столбцов можно получить 24 новых размещения. А при каждом расположении столбцов перестановкой второй, третьей и четвертой строк — еще 6 новых. Очевидно, все эти расположения различны. Итак, существует $4 \times 24 \times 6 = 576$ различных расстановок букв, удовлетворяющих условию задачи.

165. Обозначим для краткости звания офицеров буквами П, М, К, Л, а номера полков цифрами 1, 2, 3, 4. Очевидно, каждый офицер полностью характеризуется парой: (буква, цифра). Например, (К, 3) — капитан из третьего полка. Задача, следовательно, сводится к тому, чтобы в 16 клетках квадрата разместить по четыре буквы П, М, К, Л и по четыре цифры 1, 2, 3, 4 так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду не было одинаковых букв и цифр. Кроме того, все пары (буква, цифра) должны быть различны.

П	М	К	Л
Л	К	М	П
М	П	Л	К
К	Л	П	М

Рис. 191

(П, 1)	(М, 4)	(К, 2)	(Л, 3)
(Л, 2)	(К, 3)	(М, 1)	(П, 4)
(М, 3)	(П, 2)	(Л, 4)	(К, 1)
(К, 4)	(Л, 1)	(П, 3)	(М, 2)

Рис. 192

Расположим сначала буквы (см. предыдущую задачу) так, как показано на рис. 191.

Чтобы разместить цифры, мы сначала приставим к каждой букве соответствующую ей по порядку цифру (т. е. ко всем П приставим 1, ко всем М приставим 2, ко всем К приставим 3, ко всем Л приставим 4), а затем переставим каждую цифру в клетку, симметричную относительно диагонали (П, К, Л, М). В результате получим рис. 192. Это расположение и является ответом к задаче.

166. Рассмотрим квадрат из 16 клеток. Пусть его строки отвечают участникам первой команды, а столбцы — участникам второй команды. Разместим в клетках квадрата пары цифр следующим образом. Возьмем размещение букв и цифр предыдущей задачи и заменим каждую букву соответствующей ей цифрой (П → 1, М → 2, К → 3, Л → 4). В результате получим рис. 193.

II I	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,4)	(3,2)	(4,3)
2	(4,2)	(3,3)	(2,1)	(1,4)
3	(2,3)	(1,2)	(4,4)	(3,1)
4	(3,4)	(4,1)	(1,3)	(2,2)

Рис. 193

Положим теперь, что первая цифра в каждой клетке указывает номер тура, в котором встречаются игроки, соответствующие строке и столбцу, содержащим данную клетку. И если вторая цифра нечетная, то игрок первой команды играет белыми, а в противном случае черными фигурами. Поскольку любая цифра, стоящая на первом месте, встречается в каждой строке и в каждом столбце по одному разу, то в любом туре будут заняты все шахматисты, при этом у каждого будет определен единственный партнер.

Покажем, что такое расписание удовлетворяет условиям задачи. Так как в каждой строке и в каждом столбце на втором месте расположены числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке, то каждый шахматист сыграет по две партии белыми и по две партии черными фигурами. Далее, так как все пары различны, то, выбрав любые четыре пары чисел, отвечающие одному туру, т. е. имеющие на первом месте одну и ту же цифру — номер тура, мы получим на вторых местах расположенные в некотором порядке числа 1, 2, 3, 4. Это означает, что в данном туре игроки первой команды будут играть две партии белыми и две партии черными фигурами. Нагляднее это расписание игр представлено на рис. 194. Здесь цвет клетки означает цвет фигур, которыми должен играть представитель первой команды, а цифра — номер тура, в котором встречаются соперники.

$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{I} \end{matrix}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Рис. 194

Опишем некоторые способы построения латинских квадратов произвольного размера. Элементы такого квадрата размером $n \times n$ будем обозначать целыми числами.

I. Пусть p — простое число и $n = p - 1$. Перенумеруем строки квадрата сверху вниз и столбцы слева направо числами от 1 до n . На пересечении строки с номером a и столбца с номером b поместим остаток от деления на p числа ab . Так как номера строк и столбцов есть положительные целые числа, не делящиеся на p , то в каждой клетке квадрата будет стоять одно из чисел $1, 2, \dots, n$. Докажем, что в каждой строке стоят различные числа. Если в строке с номером a стоят два равных числа, скажем в столбцах с номерами b, c , то это означает, что числа ab, ac имеют одинаковые остатки при делении на p и, значит, их разность $a(b - c)$ делится на p . Но оба сомножителя a и $b - c$ отличны от нуля и по абсолютной величине меньше p . Следовательно, делимость не может иметь места, числа ab и ac имеют разные остатки при делении на p . Точно так же доказывается, что и в любом столбце квадрата стоят различные числа. Так как строки и столбцы содержат по n клеток, а всевозможных ненулевых остатков от деления на p тоже имеется n , то каждая строка и каждый столбец будут представлять собой некоторую перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.

Если построить таким способом латинский квадрат при $p = 5$, а затем заменить цифры 1, 2, 3, 4 буквами a, b, c, d соответственно, то получится второй из квадратов на рис. 190.

II. Пусть n — произвольное целое положительное число и k — целое число, не имеющее общих с n делителей. Поместим на пересечении строки с номером a и столбца с номером b остаток от деления на n числа $ak +$

b. Если на пересечении столбцов с номерами *b*, *c* и строки с номером *a* стоят равные числа, то разность $ak + b - (ak + c) = b - c$ должна делиться на *n*. Но это невозможно, так как *b*, *c* — различные целые числа, лежащие в пределах от 1 до *n*. Предположим, что в некотором столбце, скажем с номером *b*, будут стоять одинаковые числа. Если соответствующие строки имеют номера *u* и *v*, то разность $uk + b - (vk + b) = (u - v)k$ должна делиться на *n*. Ввиду того, что числа *k* и *n* не имеют общих делителей, на *n* должно делиться число *u - v*. Но это невозможно.

Итак, в каждой строке и в каждом столбце будут стоять разные числа. Это означает, как и ранее, что столбцы и строки квадрата будут некоторыми перестановками чисел 0, 1, 2, ..., *n - 1*.

При *n = 4* и *k = 1* построенный таким способом квадрат совпадает с первым на рис. 190, если заменить цифры 0, 1, 2, 3 соответственно буквами *c*, *d*, *a*, *b*.

Выбирая по-разному число *k*, можно таким способом строить различные латинские квадраты.

Предположим, что *n* — простое нечетное число, *k*, *l* — различные числа из промежутка 0, 1, ..., *n - 1* и для каждого из них указанным выше способом построен латинский квадрат. Давайте проверим, что эти пары квадратов решают задачу, подобную задаче 165, где участвуют представители *n* полков, имеющие *n* различных званий. Предположим, что при наложении квадратов в двух различных клетках окажутся одинаковые пары чисел. Если эти клетки расположены в строках с номерами *a*, *u* и столбцах с номерами *b*, *v* соответственно, то обе разности

$$ak + b - (uk + v) = (a - u)k + b - v,$$

$$al + b - (ul + v) = (a - u)l + b - v$$

должны делиться на *n*. Отсюда следует, что на *n* делится разность

$$(a - u)k - (a - u)l = (a - u)(k - l).$$

Но это возможно только в случае *a = u*, а тогда на *n* должна делиться разность *b - v*. Следовательно, *b = v*, и получается, что клетки должны совпадать.

Пары латинских квадратов, решающие задачу 165 при некотором *n*, дают возможность составить расписание турнира с *n* участниками подобно тому, как это делалось в решении задачи 166. Интересно, что при *n = 6* расписание турнира может быть составлено, хотя задача 165 неразрешима.

XV. ГЕОМЕТРИЯ ПУТЕШЕСТВИЙ

167. С первого взгляда кажется ясным, что паук должен пробежать потолок по диагонали CE и затем спуститься к мухе по ребру EK .

Поразмыслив, мы найдем для паука и другой путь: он может пробежать боковую стену по диагонали CF и подобраться к жертве по FK .

И, наконец, паук мог бы пойти по CA и по AK .

Параллелепипед симметричен относительно середины диагонали CK , поэтому каждый из путей CDK , CBK и CGK равен по длине одному из трех приведенных выше путей.

Какой же из них является кратчайшим?

Оказывается, что ни тот, ни другой, ни третий. Есть еще более короткие пути, займемся их разысканием.

Ввиду симметрии параллелепипеда можно считать, что кратчайший путь паука не заходит на боковую стену $ABEK$. Действительно (рис. 195), например, длина пути KLC равняется длине пути KMC . Поэтому можно считать, что путь пересекает одно из ребер EG , GF , FD , AD . Ввиду симметрии ребер AD и EG достаточно считать, что он пересекает EG , GF или FD .

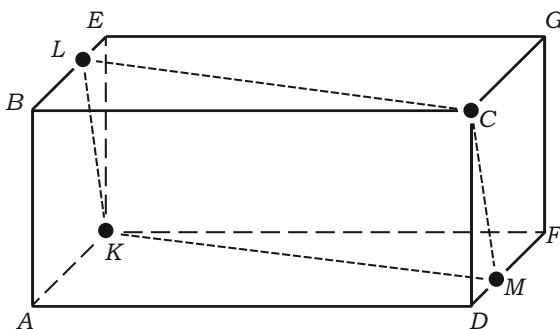


Рис. 195

Развернем параллелепипед, изображающий нашу комнату, на плоскость. Получим чертеж, представленный на рис. 196.

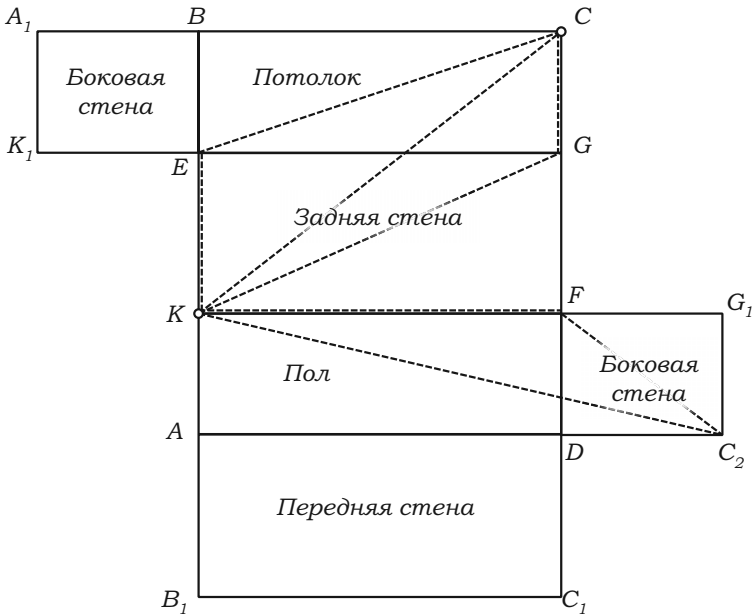
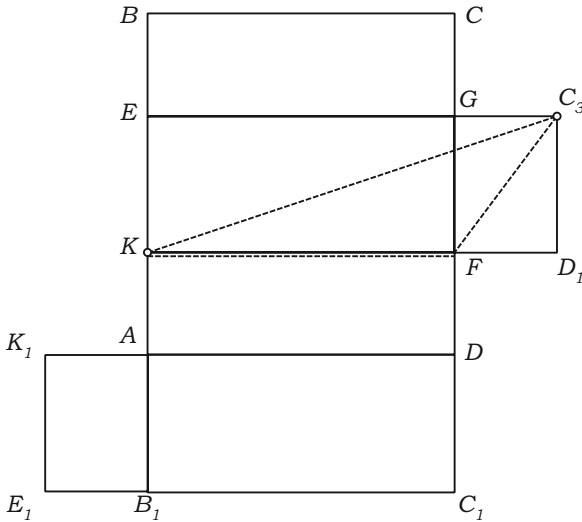


Рис. 196

Паук сидит в точке C , а муха — в точке K . Теперь мы ясно видим, что пути CEK и CGK , казавшиеся нам в неразвернутом чертеже кратчайшими, на самом деле таковыми не являются. Стоит соединить точки C и K прямой линией, чтобы получить заметно более короткий путь. Этот путь будет кратчайшим среди всех путей, пересекающих ребро EG . Аналогично, путь KC_2 будет кратчайшим среди всех путей, пересекающих ребро FD (точка C_2 также отвечает вершине C нашего параллелепипеда). В частности, он будет короче пути CFK .

Для того чтобы представить себе кратчайший среди путей, пересекающих ребро GF , развернем комнату, как показано на рис. 197. Мы видим, что KC_3 — кратчайший из путей, пересекающих ребро GF .



Остается теперь решить вопрос: какой же из этих трех путей (KC , KC_2 , KC_3) будет самым коротким. Оказывается, что это зависит от относительных размеров комнаты в длину, ширину и высоту.

Обозначим длину комнаты AD через a , высоту AB через b и ширину AK через c . Тогда из рис. 196 и 197 имеем

$$|KC| = \sqrt{a^2 + (b + c)^2},$$

$$|KC_2| = \sqrt{(a + b)^2 + c^2},$$

$$|KC_3| = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}.$$

Раскрывая скобки и сравнивая между собой подкоренные выражения, мы видим, что они отличаются друг от друга лишь членами

$$2bc, 2ab, 2ac.$$

Деля три произведения на $2abc$, получим

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{1}{b}.$$

Отсюда видно, что если

$$a > b, a > c,$$

то кратчайшим путем будет путь KC ; если

$$c > a, c > b,$$

то кратчайший KC_2 , если же

$$b > a, b > c,$$

то кратчайший путь KC_3 .

Мы видим, что кратчайший путь паука должен пересекать самое длинное из ребер

$EG, GF, FD.$

Задача о пауке и мухе оказалась гораздо сложнее, чем можно было думать с первого взгляда.

170. Исследуя разрешимость задачи, сразу видим, что Финляндия, Испания и Дания имеют *нечетное* число границ с соседними государствами, т. е. число нечетных местностей более двух. А следовательно, путешествие, которое предполагает совершить контрабандист, невозможно.

171. См. рис. 198.

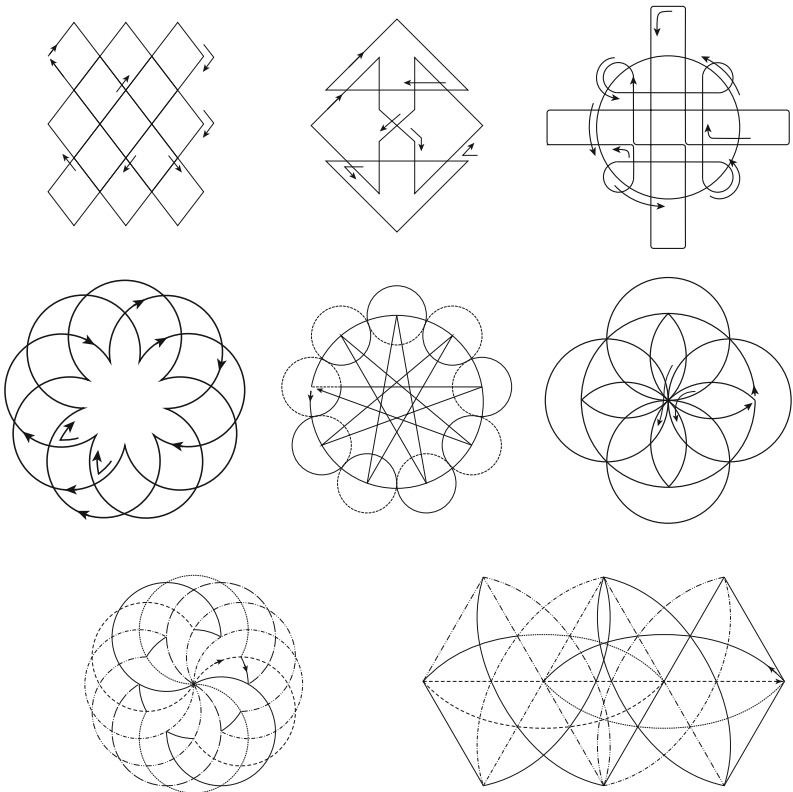


Рис. 198

172. Изобразим каждого рабочего и каждый станок на листе бумаги в виде точки. Всего получится 20 различных точек. Проведем теперь из каждой точки, изображающей рабочего, две линии к точкам, изображающим станки, на которых этот рабочий умеет работать. Мы получим сеть, состоящую из 20 точек и 20 линий, причем из каждой точки, вне зависимости от того, соответствует она рабочему или станку, выходят две линии.

Получившаяся сеть распадается на несколько кусков таких, что в пределах одного куска можно пройти по линиям сети от каждой точки до любой другой. Если же точки принадлежат разным кускам, то не существует пути, соединяющего их.

Так как в каждом куске сети все вершины четные, то его можно вычертить одним росчерком. Расставим на каждой линии сети стрелочки в соответствии с направлением вычерчивания. Тогда из каждой точки сети будет выходить единственная линия.

Линия, выходящая из точки, изображающей рабочего, будет входить в точку, изображающую станок, на котором этот рабочий будет работать. Утверждение остается верным, если число 10 в условии задачи заменить любым другим целым числом, не меньшим 2. Решение остается тем же самым.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редакторов	5
Из предисловия автора к изданию 1908 г	7
Из предисловия автора к изданию 1911 г. Роль памяти в математике	9

Глава 1. Задачи-шутки, задачи-загадки и шуточные истории

1. Дележ	12
2. Сколько кошек?	12
3. Портной.....	12
4. Число 666.....	12
5. Дробь	12
6. Разрубить подкову.....	13
7. Что сказал старик?	13

Глава 2. Упражнения со спичками

8. Сто	14
9. Три	14
10. Дом.....	15
11. Рак.....	15
12. Весы	16
13. Две рюмки	16
14. Храм	16
15. Флюгер.....	17
16. Фонарь.....	17
17. Топор	18
18. Лампа	19
19. Ключ	19
20. Три квадрата	20
21. Пять квадратов	20
22. Три квадрата	20
23. Два квадрата	21
24. Три квадрата	21

25. Четыре квадрата	21
26. Квадраты.....	22
27. Четыре треугольника.....	22
28. Поднять одной спичкой 15 спичек.....	22

Глава 3. Как сосчитать?

29. Движение пальца.....	23
30. Рейс через океан.....	24
31. Продажа яблок	24
32. Гусеница	24
33. Велосипедисты и муха.....	24
34. Собака и два путешественника.....	25
35. Быстрое возведение в квадрат	25
36. Интересное число.....	25
37. Найти число.....	25
38. Сумма последовательных чисел	26
39. Сбор яблок.....	26
40. Бой часов	27
41. Сумма натуральных чисел.....	27
42. Сумма нечетных чисел	28

Глава 4. Переправы и разъезды

43. Через ров.....	29
44. Отряд солдат	29
45. Волк, коза и капуста.....	30
46. Переправа трех рыцарей с оруженосцами.....	30
47. Переправа четырех рыцарей с оруженосцами	30
48. Переправа в трехместной лодке.....	30
49. Переправа через реку с островом	30
50. На станции железной дороги.....	31
51. Разъезд шести пароходов	31

Глава 5. Дележи

при затруднительных обстоятельствах

52. Вместо мелких долей крупные.....	32
53. Кто прав?	32
54. Спор	33
56. Дележ между двумя	34
57. Дележ пополам	34
58. Дележ кваса	34

Глава 6. Сказки и старинные истории

59. Как гусь с аистом задачу решали	35
60. Крестьянин и черт	37
61. Крестьяне и картофель	38
63. Недоумение крестьянок	39
64. Находка	40
65. Дележ верблюдов	41
66. Сколько воды в бочке?	41
67. Расстановка часовых	42
68. Обманутый хозяин	42
69. Сказка об Иване-царевиче и Кашее Бессмертном, умевшем считать только до десяти	43
70. За грибами	45
71. Сколько было?	46
72. Часы поставлены верно	46
73. Восстановление записи	46
74. Хитрецы	47
75. Спор кучера с пассажиром	47
76. Кто на ком женат?	49

Глава 7. Упражнения с куском бумаги

78. Квадрат	51
79. Равнобедренный треугольник	53
80. Равносторонний треугольник	53
81. Правильный шестиугольник	55
82. Правильный восьмиугольник	57
83. Оригинальное доказательство	57
84. Теорема Пифагора	58
85. Как вырезать?	60
86. Из прямоугольника — квадрат	60
87. Коврик	60
88. Два коврика	61
89. Коврик с розами	62
90. Квадрат на 20 равных треугольников	62
91. Из креста — квадрат	62
92. Из квадрата — три квадрата	62
93. Из квадрата — два квадрата	63
94. Из квадрата — три квадрата	63
95. Из шестиугольника — квадрат	63

Глава VIII. Геометрические софизмы**и парадоксы**

96. Загадочное исчезновение.....	64
97. Искусная починка.....	67
98. Еще один софизм.....	68
99. Похожая задача.....	69
100. Земля и апельсин.....	70

Глава 9. Угадывание чисел

101. Угадать число.....	71
102. Сколько осталось предметов?.....	73
103. Чему равна разность?.....	73
104. Чему равно частное?.....	74
105. Число 1089.....	74
106. Какое число задумано?.....	74
107. Волшебная таблица.....	75
108. Четное число.....	76
109. Видоизменение предыдущей задачи.....	77
110. Еще одно видоизменение задачи 108.....	77
111. Угадать задуманное число иным способом.....	79
112. Угадать задуманное число еще одним способом.....	81
113. Угадать несколько задуманных чисел.....	82
116. Та же задача с двумя взаимно простыми числами.....	84
117. Отгадать несколько задуманных чисел, если каждое из них не превышает десяти.....	85

Глава 10. Игры с числами и предметами

118. Записать единицу тремя пятерками.....	87
119. Записать двойку тремя пятерками.....	87
120. Записать четыре тремя пятерками.....	87
121. Записать пять тремя пятерками.....	87
122. Записать нуль тремя пятерками.....	87
123. Записать 31 пятью тройками.....	87
125. Кто первый скажет «сто»?.....	88
126. Обобщение.....	88
127. Собрать в группы по 2.....	88
128. Собрать в группы по 3.....	89
129. Детская пирамида.....	89
130. Интересная игра.....	90

Глава 11. Домино

Историческая справка.....	92
131. Удивительный отгадчик.....	92
132. Верная отгадка.....	95
133. Сумма всех очков домино.....	95
134. Небольшая забава.....	95
135. Наибольшее число.....	96
136. Квадрат из 8 косточек.....	97
137. Квадрат из 18 косточек.....	97
138. Прямоугольник из 15 косточек.....	97

Глава 12. Шашки

139. Переставить шашки.....	98
140. Четыре пары.....	98
141. Пять пар.....	99
142. Шесть пар.....	99
143. Семь пар.....	99
144. Пять линий, 10 шашек.....	100
145. Интересная расстановка.....	100

Глава 13. Шахматы

146. Четыре коня.....	101
147. Пешка и конь.....	102
148. Две пешки и конь.....	102
149. Конь.....	102
150. Жуки.....	102
151. Жуки на шахматной доске.....	103
152. Замкнутый путь жука.....	103
153. Пешка и домино.....	103
154. Две пешки и домино.....	103
155. Опять две пешки и домино.....	104
156. Шахматные фигуры и домино.....	104
157. О восьми королевах.....	104
158. О ходе шахматного коня.....	110

**Глава 14. Комбинаторные задачи
с квадратами**

159. Расставить три числа.....	116
160. Расставить 9 чисел.....	116
161. Расставить 25 чисел.....	117

162. Расставить 16 чисел	117
163. Расставить четыре буквы.....	117
164. Расставить 16 букв	117
165. Разместить 16 офицеров.....	118
166. Шахматный матч	118

Глава 15. Геометрия путешествий

167. О пауке и мухе.....	119
Мосты и острова	119
168. Задача Эйлера	120
169. Переход через 15 мостов.....	125
170. Путешествие контрабандиста	127
171. О фигурах, вычерчиваемых одним росчерком	127
172. В мастерской.....	132

Глава 16. Лабиринты

Геометрическая постановка задачи о лабиринтах.....	137
Решение задачи о лабиринтах	139
173. Головоломный лабиринт	142
174. Беседка.....	143
175. Еще лабиринт	144
176. Лабиринт английского короля.....	145

Решения, ответы и замечания

I. Задачи-шутки, задачи-загадки и шуточные истории.....	146
II. Упражнения со спичками	148
III. Как сосчитать?	156
IV. Переправы и разъезды	160
V. Дележи при затруднительных обстоятельствах	166
VI. Сказки и старинные истории	173
VII. Упражнения с куском бумаги.....	182
VIII. Геометрические софизмы и парадоксы.....	192
IX. Угадывание чисел.....	195
X. Игры с числами и предметами.....	203
XI. Домино	208
XII. Шашки	210
XIII. Шахматы.....	215
XIV. Комбинаторные задачи с квадратами	219
XV. Геометрия путешествий	229

Научно-популярное издание

6+

СЕРИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА»

Игнатьев Емельян Игнатьевич
В ЦАРСТВЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СМЕКАЛКИ

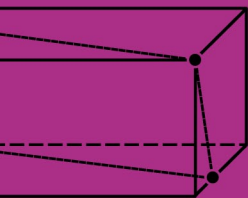
Ответственный редактор *С. А. Федоров*
Компьютерная верстка *В. В. Брызгаловой*
Дизайн обложки *А. А. Кузьминой*

Подписано в печать 23.10.2017.
Формат 60х90/16. Усл. печ. л. 16,0.
Тираж 2000 экз. Заказ №

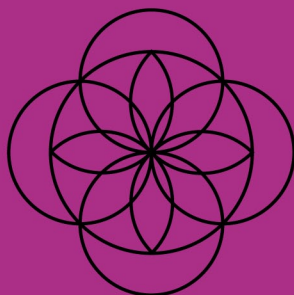
Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ООО «Издательство АСТ»
129085, Москва, Звездный бульвар, д.21, стр. 1, ком.39
Наши электронные адреса: WWW.AST.RU
E-mail: astpub@aha.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА



Книга «В царстве математической смекалки» широко известна, в том числе и среди тех, кто никогда не слышал ее названия. Емельян Игнатьевич Игнатьев (1869–1923), педагог и общепризнанный классик популярной математической литературы, создал замечательную подборку интересных задач, стимулирующих математическое и логическое мышление. Впервые увидев свет в 1908 году, его книга с тех пор ничуть не утратила свой образовательный и развлекательный потенциал. Вошедшие в нее задачи, головоломки и загадки с тех пор можно было встретить не только в переизданиях оригинальной книги, но и в других сборниках занимательных математических упражнений. В этом издании представлена версия текста, выпущенная издательством «Наука» в 1979 году.



ISBN 978-5-17-982710-8



9 785179 827108

WWW.ASTRU.RU